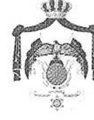
مقدمة في ميكانيك الكم

الجزء الأول

الأستاذ الدكتور محمد باسل الطائي
قسم الفيزياء ـ جامعة اليرموك



بسم الله الرحمن الرحيم
المملكة الأردنية الهاشمية
The Hashemite Kingdom of Jordan
وزارة الثقافة
Ministry of Culture
دائرة المكتبة الوطنية
Department of the National Library



الرقم: م أ/١٢٩٧/١/١
التاريخ: ٢٠١٦/٣/٢٣
الموافق: ....

السـيد / محمد باسل الطائي

تحية طيبة وبعد،

أرجو إعلامكم بأن الكتاب المقدم من قبلكم قد تم منحه رقم الإيداع ، واستخلصت بيانات الفهرسة الأولية له:

اسـم الكتـاب: مقدمة في ميكانيك الكم

المـؤلـف: محمد باسل الطائي

يرجى العمل على تثبيت هذا الرقم وبيانات الفهرسة على ظهر صفحة عنوان الكتاب كما هو مبين أدناه، **وتسليم مركز الإيداع في دائرة المكتبة الوطنية ثلاث نسخ على سبيل الإيداع**، حال الانتهاء من طباعة الكتاب وقبل عرضه للبيع أو التوزيع، **استنادا لأحكام المواد (٣٨، ٣٩، ٤٠، ٤١) من قانون حماية حق المؤلف رقم (٢٢) لسنة ١٩٩٢ وتعديلاته، وأحكام نظام إيداع المصنفات رقم (٤) لسنة ١٩٩٤**، مبينا بأن دائرة المكتبة الوطنية تعتمد في التصنيف الطبعة الثالثة والعشرين المترجمة والمعدلة من نظام ديوي العشري

واقبلوا فائق الاحترام،،،

/ المدير العام

محمد يونس العبادي

المملكة الأردنية الهاشمية
رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية
(٢٠١٦/٣/١٢٩٧)

نسخة / مركز الإيداع

٥٣٠.١٢
الطائي، محمد باسل
مقدمة في ميكانيك الكم / محمد باسل الطائي .- اربد: المؤلف، ٢٠١٦

( ) ص .
ر. إ. : ٢٠١٦/٣/١٢٩٧.
الواصفات : /الفيزياء//ميكانيكا الكم/

يتحمل المؤلف كامل المسؤولية القانونية عن محتوى مصنفه ولا يعبّر هذا المصنف عن رأي دائرة المكتبة الوطنية أو أي جهة حكومية أخرى.

تلفون : ٥٦٦٢٨٤٥(٦-٩٦٢) فاكس : ٥٦٦٢٨٦٥ (٦-٩٦٢) ص .ب (٦٠٧٠) الرمز البريدي ١١١١٨ عمان – الأردن
P.O.Box:(٦٠٧٠) Code No : ١١١١٨ (Amman – Jordan) Fax : (٩٦٢-٦)٥٦٦٢٨٦٥ Tel:(٩٦٢-٦)٥٦٦٢٨٤٥
www.nl.gov.jo E-mail: nl@nl.gov.jo

مقدمة الكتاب

تم إعداد هذا الكتاب ليكون مرجعا للطلبة الدارسين لمادة ميكانيك الكم في المرحلة الجامعية، فقد وجدت بعد تدريس هذا الموضوع لسنين عديدة أن اللغة تقف حاجزا بين الطالب وإستيعابه للمادة على النحو الصحيح. فاللغة وسيلة للتفكير فضلاً عن كونها وسيلة للإتصال والتواصل. لذلك جاء الكتاب بالعربية، وعلى الطالب أن يعي قيمة هذا فيقرأ عبارات الكتاب قراءة الدارس المتمعن ليستوعب مضامينها على نحو عميق يفي بمتطلبات الفهم الصحيح. إلى جانب ذلك فقد وجدت أن العديد من الكتب الأجنبية إنما يقدم هذه المادة المهمة على نحو تجريدي فلا يبذل المؤلفون الجهد اللازم لتقديم المفاهيم العلمية العميقة والمضامين الفيزيائية التي يشتمل عليها ميكانيك الكم بل يركزون إهتمامهم على الجانب الرياضي والحسابي. وهذا إنما يعطل الفهم الصحيح لمفردات هذه المادة. ومع إقراري بأن مفردات هذه المادة ومفاهيمها عصيّة على الفهم، بل على التبسيط أيضاً، فإنني أرى أن إيضاح المفاهيم ضروري لإحاطة الدارس بمعاني تلك المفردات التجريدية التي تزخم بها المادة. فمثلا حينما نتكلم عن حلول معادلة شرودنجر لمسائل في بعد واحد يتوجب أن نعطي للطالب أمثلة عملية متصلة بالمسألة في مدخل الحديث عن المسألة وموقعها في الفيزياء. فليس المهم أن يحفظ الطالب رموزاً ومعادلات بل الأهم أن يفهم معاني ومضامين تلك الرموز والمعادلات.

لماذا التسمية "ميكانيك الكموم"؟ ولماذا ميكانيك الكم غير مفهوم؟

يُؤثَر عن الفيزيائي اللامع ريتشارد فينمان قوله: "من ظن أنه يفهم ميكانيك الكم تماما فهو لم يفهمه حقاً". ويؤثر عن نيلز بور قوله "من لم تصبه الدهشة عند دراسته ميكانيك الكم فإنه دون شك لم يفهم منه شيئاً" وهذه الأقوال لم تكن لتصدر عن أعلام الموضوع ومؤسسيه إلا لأنهم يعلمون أن هنالك جوانب غامضة في تفسير نظرية الكموم. ولعل من أهم جوانب

الغموض فيها مسألة تراكب الأحوال وما يترتب عليها في مسألة القياس وطبيعته الإحتمالية، فهذه مسألة عصية على الفهم جهد في تفسيرها جهابذة الفيزياء واختلف في فهمها علماء كبار من أمثال ألبرت أينشتاين ونيلز بور وهيزنبرغ وشرودنجر. ولست هنا بصدد الدخول الى تلك التفاسير ولا المشاركة في تلك المماحكات الفلسفية، إنما أردت التنبيه عليها بهدف أن يعي الدارس جلال المسألة وعمقها في فهم فطرة العالم وسنة الخلق فيه.

تحتوي مادة الكتاب على القسم الأول من مقرر ميكانيك الكم لطلبة جامعة اليرموك وهو مساق يعطى على مدى فصل دراسي واحد يكمله مساق ثان مقرر لطلبة تخصص الفيزياء حصراً. وقد جعلت الفصلين الأول والثاني من هذا الكتاب مراجعة لمفاهيم أساسية ضرورية لفيزياء الكم هي أصلاً جزء من مقرر الفيزياء الحديثة لكنني وجدت الكثير من الأساتذة يفضل البدء بها لذا وضعتها هنا. أما بقية الفصول فهي تسير على النمط التقليدي لمقرر ميكانيك الكم ما خلا بعض الإلماحات والتوضيات المفاهية التي امتاز بها هذا الكتاب.

وبعد هذه السنين الطويلة من التدريس آثرت أن أكتب في هذا الموضوع الذي استهواني حتى قبل أن أختار دراسة الفيزياء عسى أن أقدم لطلبتي الأعزاء وزملائي الأفاضل عملاً مميزاً يخدم رسالة التعليم والتعلم. راجيا منهم إفادتي بما يتوفر لديهم من مقترحات تُسهم في الإرتقاء بهذا الكتاب في طبعاته اللاحقة. وبهذه المناسبة أشكر الزميلين الدكتور قاسم مهيدات والدكتور مازن النعيرات على قرائتهم مسودة الكتاب وتنبيهي على بعض الأخطاء المطبعية التي وقعت فيها.

محتويات الكتاب

الفصل الأول

مقدمات نظرية الكم

في هذا الفصل مراجعة لأهم مفاهيم الفيزياء الحديثة والغرض في هذا إعادة تقديم هذه المفاهيم بأسلوب ربما يكون أكثر جدوى وفائدة للطالب. وربما يحجم بعض الأساتذة عن تقديم هذا الفصل لطلبتهم بإعتباره جزءً من مقرر الفيزياء الحديثة، وهذا صحيح، لكنني أنصح بتدريسه للطلبة كجزء من مقرر ميكانيك الكموم لأنه يؤسس لفهم هذه المادة. ودون شك فإن في الإعادة إفادة كما يقال، فضلا عن أن تقديمي للمسائل هنا يتضمن ما هو جديد في الشكل أو المضمون في بعض المواضع. لذلك فإنني سأقدم في هذا الفصل عرضاً موجزاً لأهم التجارب والظواهر التي مهدت لظهور ميكانيك الكموم.

ظواهر مهدت لفيزياء جديدة

قرب نهاية القرن التاسع عشر كانت علوم الفيزياء قد وصلت إلى مراحل متقدمة فقد كان الفيزيائيون قد أكملوا صياغات الميكانيك الكلاسيكي على أفضل وجه من خلال صياغات هاملتن ولاكرانج لمعادلات الحركة الحرة والقسرية على السواء. كما كانت نظرية المجالات الكلاسيكية قد تكاملت من خلال صياغة ماكسويل للمجال الكهرمغناطيسي الذي فتح أفاقا ممتازة لفهم الخصائص الفيزيائية والهندسية للإشعاعات الكهرمغناطيسية عموما وللضوء بوجه خاص، فطوّرت نظرية علم البصريات على نحو غير مسبوق. كما قدمت النظرية الحركية للغازات عبر استخدام الميكانيك الإحصائي لبولتزمان صورة دقيقة للبنية الجزيئية للمادة وتمكّنت من حساب الكميات الفيزيائية الجهرية Macroscopic المتعلقة بقوانين الغازات على نحو بديع لم يسبق للعقل البشري أن قدمه من قبل. وهكذا قامت الفيزياء الفيزياء الكلاسيكية وشكلت الرؤية العلمية للعالم على ثلاثة أركان رئيسية هي:

1. قوانين الحركة لنيوتن وقانونه في الجاذبية الكونية.

2. قوانين ماكسويل في الألكترودواينميك وعلوم البصريات المتفرعة عنها.

3. النظرية الحركية للغازات والديناميكا الحرارية والميكانيك الإحصائي لبولتزمان.

غطت هذه الأركان الثلاثة مجمل علوم فيزياء القرن التاسع عشر ولم يتبق أمام الفيزيائيين إلا بضعة مسائل تنتظر الحل. ومن هذه المسائل:

1. توزيع الطاقة على طيف الإشعاع الحراري للمواد
2. تفسير الخطوط الطيفية
3. ظاهرة التأثير الكهرضوئي
4. ظاهرة كومبتن
5. توليد أشعة X

فضلا عن ظواهر أخرى تتعلق بانتقال الأمواج الكهرمغناطيسية في الفراغ وبنية الذرات والجزيئات ومسائل تتعلق بالتصرف المزدوج للإلكترونات وغيرها من هموم الفيزياء التي لا تنتهي. سنعرض في هذا الفصل للمعالجات التي جرت لأهم هذه المسائل وسنبدأ بمشكلة توزيع الطاقة على في المدى الطيفي للإشعاعات الصادرة عن المواد الساخنة والتي سميت بمسألة إشعاع الجسم الأسود.

إشعاع الجسم الأسود Blackbody Radiation

عند تسخين سلك معدني مثلا على نار فإننا نلاحظ أن لونه يتحول إلى الإحمرار تدريجيا. لكننا لو استمرينا بتسخينه لوجدنا أن لونه يتحول إلى الأصفرار مع ارتفاع درجة الحرارة، ولو زدنا من درجة الحرارة لوجدناه يصير أبيضاً ثم نجده يميل إلى الدكانة ويكاد يصير كحلياً وهكذا حتى يصير أسوداً. وقد ميّز الفيزيائيون التجريبيون ثلاثة متغيرات أساسية في هذه المسألة: الأول هو درجة الحرارة T، والثاني هو تردد الأشعة المنبعثة من سطح الجسم

الساخن v أو الطول الموجي، والمتغير الثالث هو كمية الطاقة المنبعثة من سطح الجسم الساخن $u(\nu)$. والمعروف أن هنالك علاقة بين تردد الأشعة وطولها الموجي هي

$$\lambda\nu = c$$

حيث c هي سرعة الموجة الكهرمغناطيسية وهي سرعة الضوء نفسها.

وكان الفيزيائي ستيفان قد وجد عام 1879 أن كمية الطاقة المنبعثة خلال وحدة الزمن لكل وحدة مساحة (أي الشدة Intensity) من سطح الجسم الساخن تتناسب طرديا مع القوة الرابعة لدرجة الحرارة

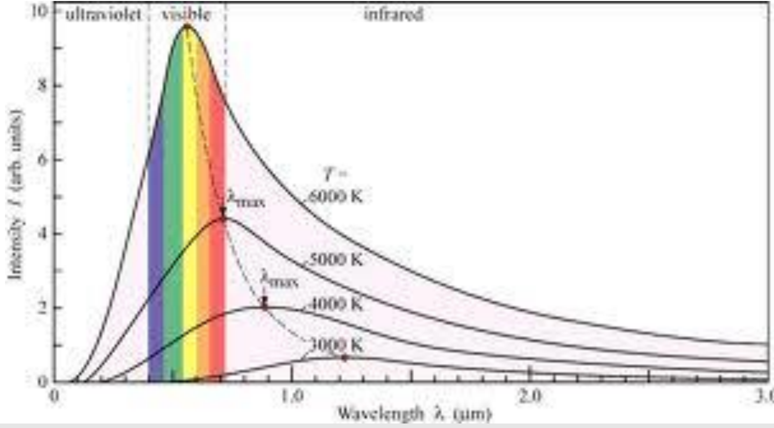
$$U(T) = \sigma a T^4 \qquad (1.1)$$

حيث أن $\sigma = 5.67\times10^{-8} W m^{-2} K^{-4}$ هو ثابت ستيفان بولتزمان و a مقدار يعتمد على نوع السطح الساخن يعبّر عن كفاءة الإشعاعية وقيمته العظمى واحد. وفي العام 1884 قدم لودفيك بولتزمان اثباتا نظريا لقانون ستيفان هذا معتمدا على قوانين الثرموداينميك ونظرية ماكسويل الكهرمغناطيسية.

لكن الفيزيائيين التجريبيين وجدوا أيضاً أن كمية الطاقة المنبعثة تتوزع على جميع الترددات أو الأطوال الموجية وهي ليست متساوية في التوزيع بل تبلغ قيمة عظمى عند تردد (طول موجي) معين يعبر عنه لون الجسم الساخن. فحين يكون الجسم ساخنا بدرجة حرارية ويظهر فيها أحمراً فذلك لأن معظم كمية الطاقة المنبعثة منه إنما تكون ضمن نطاق الطول الموجي للون الأحمر، وحين يصير لون الجسم الساخن أصفرا فإن معظم طاقة الأشعاع هي في نطاق الطول الموجي للون الأصفر، وهكذا أصبح لون الجسم الساخن دليلا على الطول الموجي الذي تكون عنده الطاقة المنبعثة من الجسم أكبر ما يكون. وقد تمثل هذا التصرف اللوني مع درجة الحرارة واللون بالمنحنيات المبينة بالشكل (1-1). إن القانون الذي يضبط العلاقة بين الطول الموجي المنبعث عند أعظم شدة ودرجة الحرارة يسمى قانون فين Wien للإزاحة وهو

$$\lambda_{\max} = \frac{2898.9 \times 10^{-6}}{T} \qquad (1.2)$$

حيث تقاس $\lambda_{\max}$ بالمتر وT بالكلفن.



الشكل (1–1) منحنيات إشعاع الجسم الأسود

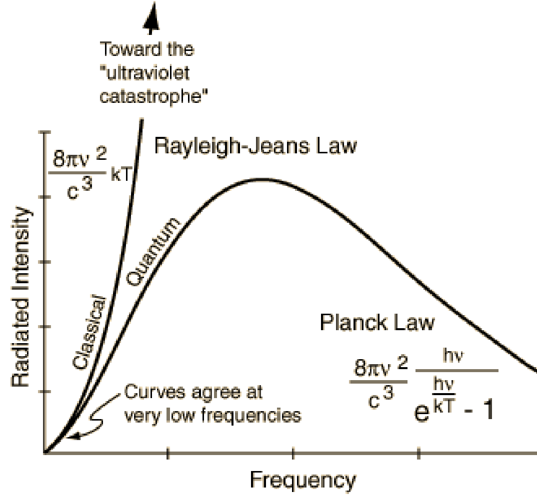
وقد سميت هذه المنحنيات "أطياف الجسم الأسود" Blackbody Spectra. وقد قصدوا بالجسم الأسود الجسم المثالي الذي يبعث الطاقة الإشعاعية في ظروف توازن حراري مثالية يكون فيها مقدار ما يبعثه من الطاقة مساويا لمقدار ما يمتصه منها. وهنا ينبغي التأكيد على أن الجسم الساخن عند أية درجة حرارية يبعث فعليا جميع الأطوال الموجية التي يمثلها الطيف الكهرمغناطيسي بشدات مختلفة ومن الواضح من المنحنيات أعلاه أن الأمواج القصيرة جدا والأمواج الطويلة تكاد تكون منعدمة عملياً.

ولغرض تفسير هذه المنحنيات لجأ الفيزيائيون إلى النظرية الكهرمغناطيسية التي تصف تصرف الإشعاعات الحرارية بكونها إشعاعات كهرمغناطيسية فوجد الفيزيائيان رايلي وجينز أن النظرية الكهرمغناطيسية تقدم العلاقة التالية

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT \qquad (1.3)$$

حيث أن k هو ثابت بولتزمان.

لكن هذه العلاقة لا تفسر التصرف الحقيقي للإشعاع مع الأطوال الموجية، إذ أننا هنا نجد أن الطاقة المنبعثة تتناسب طرديا مع مربع التردد أي عكسيا مع مربع الطول الموجي وهذا صحيح تجريبياً في منطقة الأطوال الموجية الكبيرة ولم يُشاهد في منطقة الأطوال الموجية الصغيرة من الطيف وهو نطاق الترددات فوق البنفسجية. لذلك سميت هذه المعضلة "الكارثة فوق البنفسجية".



الشكل (1-2) الكارثة فوق البنفسجية

من جانب آخر وجد فين، ومن خلال تأمله في منحنيات إشعاع الجسم الأسود، أن كمية الطاقة المنبعثة في نطاق الأطوال القصيرة (أي الترددات العالية) يتناسب مع $e^{-\beta\nu/T}$ مما دعم الفكرة القائلة بأن النظرية الكهرمغناطيسية التقليدية لن تستطيع تقديم حل لهذه المعضلة. والقانون بالضبط هو

$$u(\nu,T) = A\nu^3 e^{-\beta\nu/T} \qquad (1.4)$$

هنا جاء ماكس بلانك عام 1901 وقام بدراسة توزيع الطاقة في الإشعاع الحراري في إطار نظري مثالي فتصور الجسم الأسود المثالي كرة مجوفة في ظروف توازن حراري عند درجة حرارة T ينبعث منها الإشعاع عبر ثقب صغير جدا. فيمثل الثقب نفسه الجسم الأسود

وتصور بلانك أن الإشعاع في داخل التجويف يكون على شكل هزازات توافقية Harmonic Oscillators ذات ترددات مختلفة تمتد من الصفر إلى المالانهاية. ثم تعامل مع هذه الهزازات وكأنها جسيمات غاز تخضع لقوانين بولتزمان الإحصائية Boltzmann Statistics. بمعنى كأنه تصور تلك الهزازات على شكل رزم للطاقة كل منها تحوي كمية من الطاقة قدرها

$$\varepsilon = h\nu \qquad (1.5)$$

أي أن الطاقة الكلية التي يحتويها التجويف الساخن هي

$$E = nh\nu \qquad (1.6)$$

حيث أن n هو عدد الهزازات و h هو ثابت مقداره $6.626 \times 10^{-34}\, J.s$ سمي فيما بعد ثابت بلانك. وبهذه المعالجة توصل بلانك إلى حساب شدة الإشعاع خلال نطاق الترددات من ν إلى ν+dν واستنتج العلاقة التالية

$$u(\nu)d\nu = \frac{8\pi h}{c^3}\frac{\nu^3 d\nu}{e^{h\nu/kT}-1} \qquad (1.7)$$

وحين تم إختبار هذه العلاقة تجريبياً وجد أنها تتوافق تماما مع التجارب التي أجريت لقياس طيف الإشعاعات الحرارية المنبعثة عن الأجسام ضمن ظروف التوازن الحراري شبه المثالية. وبهذا تم حل مسألة الإشعاعات الحرارية فيما سمي إشعاع الجسم الأسود.

مناقشة

لابد لنا هنا من مناقشة ما أنجزه بلانك لأننا سنرى أن لفرضيته دوراً خطيراً في انبثاق فيزياء جديدة غيرت تصوراتنا عن العالم ومكنتنا من تطوير تكنلوجيات جديدة نقلت حياتنا إلى مستويات حضارية جديدة وكان لها تأثيراتها الكبيرة في فهمنا للعالم.

على صعيد المفاهيم فإن التصور التقليدي الذي تقدمة نظرية ماكسويل هو أن الإشعاعات الكهرمغناطيسية هي أمواج، والأمواج كيانات متصلة ومتغيرة على الدوام. لكن مقترح بلانك ينفي صفة الإتصال عن الإشعاعات الحرارية ويتعامل معها وكأنها جسيمات. فهاهنا تكون الإشعاعات الحرارية عبارة عن كموم من الطاقة وكأن الموجة قد تقطعت أجزاءً كل منها هيئة موجية منفصلة. وحيث أن هذه الكموم هي أشبه بالجسيمات منها بالأمواج فقد تحيّر بلانك في فهم هذا التصرف الغريب للطاقة التي هي أمواج كهرمغناطيسية. فكيف نتعامل إذن مع الضوء؟ هل نعتبره جسيمات وقد علمنا من قبل أن النظرية الجسيمية في الضوء كانت قد فشلت في تفسير ظواهر التداخل والحيود والإستقطاب وحتى الإنكسار أيضاً؟ لهذا السبب فقد تمسك بلانك أول الأمر بالقول أن فرضيته تنطبق فقط على الإشعاعات الحرارية وليس على جميع الإشعاعات الكهرمغناطيسية، ولم يفلح أينشتاين في إقناعه بتوسيعها لتشمل الضوء.

من جانب آخر ينبغي أن نتأكد من أن قانون بلانك (1.7) يحقق قانون رايلي جينز في نطاق الترددات الواطئة وقانون فين في نطاق الترددات العالية. ففي حالة الترددات الواطئة تكون $h\nu << kT$ مما يعني أن

$$e^{h\nu/kT} - 1 \approx 1 + \frac{h\nu}{kT} + \ldots - 1 = h\nu$$

بالتالي فإن

$$u(\nu)d\nu \approx \frac{8\pi h}{c^3}\frac{\nu^3 d\nu}{h\nu/kT} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}kTd\nu$$

أما في نطاق الترددات العالية فإن $h\nu >> kT$ بالتالي فإن

$$e^{h\nu/kT} - 1 \approx e^{h\nu/kT}$$

وهذا يعني أن

$$u(\nu)d\nu = \frac{8\pi h}{c^3}\nu^3 e^{-h\nu/kT}d\nu$$

وهذا هو قانون فين نفسه.

من جانب آخر يمكننا التأكد من أن قانون بلانك يحقق أيضا قانون ستيفان ـ بولتزمان (1.1) حيث ينبغي أن نكامل على كامل الطيف وكما يلي

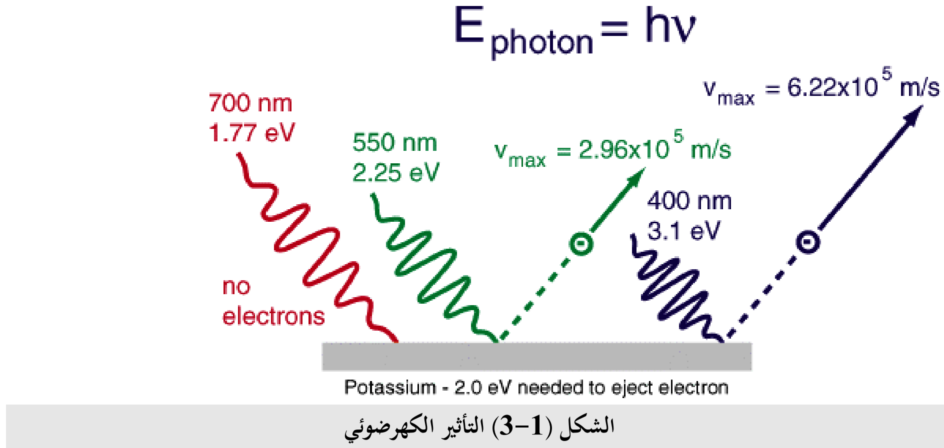
$$\begin{aligned}\int_0^\infty u(\nu,T)d\nu &= \frac{8\pi h}{c^3}\int_0^\infty \frac{\nu^3 d\nu}{e^{h\nu/kT}-1} = \frac{8\pi k^4T^4}{h^3c^3}\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1}dx \\ &= \frac{8\pi^4k^4T^4}{h^3c^3}\left(\frac{\pi^4}{15}\right) = \frac{8\pi^5k^4}{15h^3c^3}T^4 = \frac{4}{c}\sigma T^4\end{aligned}$$

حيث أن σ هو ثابت سيفان بولتزمان. بهذا نتأكد نظريا من صحة قانون بلانك. وفي مختبرات الفيزياء الحديثة في الجامعات تتوفر عادة تجربة لدراسة الإشعاعات الحرارية الصادرة عن جسم ساخن ويمكن من خلالها التحقق من قانون بلانك عملياً.

ظاهرة التأثير الكهرضوئي Photoelectric Effect

كان ألبرت أينشتاين قد لاحظ أن الفيزيائيين حائرين في تفسير ظاهرة انبعاث الإلكترونات عن سطوح المعادن عند تسليط إشعاعات ذات أطوال موجية قصيرة عليها. ولم تكن المعضلة في انبعاث الإلكترونات بل كانت في خصائصها الحركية وطريقة انبعاثها وعلاقة ذلك بشدة الإشعاع المسلط وتردده. لذلك ما أن نشر بلانك بحثه الذي حل بموجبه مشكلة إشعاع الجسم الأسود حتى كتب ألبرت أينشتاين إليه رسالة يحضه فيها على الإقرار بأن تكميم الطاقة يشمل جميع أنواع الطاقة الكهرمغناطيسية بما فيها الضوء المرئي. إلا أن

بلانك بقي مصرا على أن قانونه ينطبق فقط على الإشعاعات الحرارية.[1] ويبدو أنه لم يقتع بفكرة تطبيق التكميم على الضوء لأن هذا سيجعل الضوء جسيمات وهي فكرة لها مشاكلها.



الشكل (1–3) التأثير الكهرضوئي

تمثلت مشكلة التأثير الكهرضوئي في ما يلي:

إن الطاقة الحركية للإلكترونات المنبعثة تتناسب طرديا مع تردد الضوء الساقط على السطح وليس لها علاقة بشدة الضوء الساقط على السطح كما تتوقع نظرية ماكسويل الكهرمغناطيسية.

أن هنالك حداً أدنى لتردد الضوء الساقط لكي يحصل انبعاث الإلكترونات وهذا الحد الذي يسمى تردد العتبة Threshold Frequency يعتمد على نوع معدن السطح، فالسطوح الحساسة يكون تردد عتبتها قليل.

إن عدد الإلكترونات المنبعثة من السطح يتناسب مع شدة الضوء الساقط ولا علاقة له بتردد الضوء الساقط.

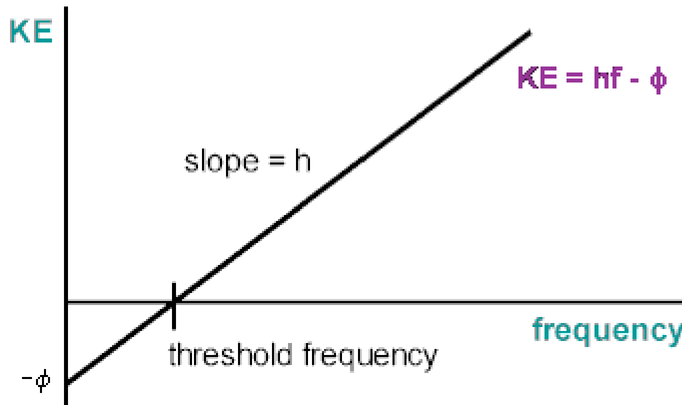
---

[1] راجع كتاب

M.S. Longair, Theoretical Concepts in Physics, Cambridge University Press 1984 p.226.

وفقاً للنظرية الكهرمغناطيسية التي تقدم وصفاً موجياً متصلاً لطاقة الإشعاع الكهرومغناطيسي فإنه إذا كانت طاقة الإلكترونات المنبعثة حصيلة لإمتصاص مستمر للطاقة الكهرومغناطيسية الساقطة فإن الطاقة الحركية للأكترونات تتناسب طردياً مع شدة الضوء الساقط. وهنا تظهر التجربة العملية تناقضاً آخر مع النظرية الكهرمغناطيسية. لذلك أستثمر ألبرت أينشتاين فرضية بلانك لتفسير الصفات العملية لظاهرة الإنبعاث الكهرضوئي على أفضل مايمكن إذ قدم تفسيره كما يلي:

إن طاقة الضوء الساقط تتألف من عدد من الكموم، كل منها يسمى فوتون، يحمل قدرا من الطاقة مقدارها $\varepsilon = h\nu$ وحين يحصل امتصاص هذه الفوتونات فإن كل فوتون يعطي طاقته لإلكترون واحد لا أكثر فيذهب جزء من الطاقة لتخليص الإلكترون من جذب السطح له (وهذا هو دالة الشغلWork Function) ويذهب الباقي كطاقة حركية للأكترون. وعلى هذا فكلما كان فائض الطاقة عن دالة الشغل للسطح أكبر كانت الطاقة الحركية التي يمتلكها الإلكترون المنبعث أكبر.



الشكل (1–4) تناسب الطاقة الحركية طرديا مع تردد الضوء الساقط

وهكذا وضع أينشتاين معادلته لتفسير الظاهرة الكهرضوئية كما يلي:

$$h\nu = h\nu_0 + (K.E)_e \qquad (1.8)$$

أما شدة الضوء فإنها في تعبير الطاقة المكممة تعني عدد الفوتونات الساقطة في الثانية الواحدة على وحدة المساحة. ولما كان الفوتون الواحد يختص بانبعاث إلكترون واحد من السطح أصبح من المفهوم ان يعتمد عدد الإلكترونات على عدد الفوتونات الساقطة على السطح، أي على شدة الضوء الساقط عليه.

هكذا تؤكد ظاهرة التأثير الكهرضوئي مرة أخرى حقيقة تكميم الطاقة. لذلك تم التعامل مع الضوء وجميع كموم الطاقة الكهرمغناطيسية كجسيمات سميت الفوتونات Photons. وفي مختبر الفيزياء الحديثة توجد تجربة يمكن للطالب من خلالها أن يتحقق من صفات ظاهرة التأثير الكهرضوئي كما يمكنه حساب قيمة ثابت بلانك منها.

تمرين: إذا كانت الطاقة الحركية العظمى للإلكترونات المنبعثة من سطح ألمنيوم هي 2.3 إلكترون فولط لإشعاع طول موجته 200 نانومتر وكانت طاقتها 0.9 إلكترون فولط عندما كان طول موجة الإشعاع هو 258 نانومتر، فما مقدار ثابت بلانك وما مقدار دالة الشغل للسطح؟ الحل متروك للطالب

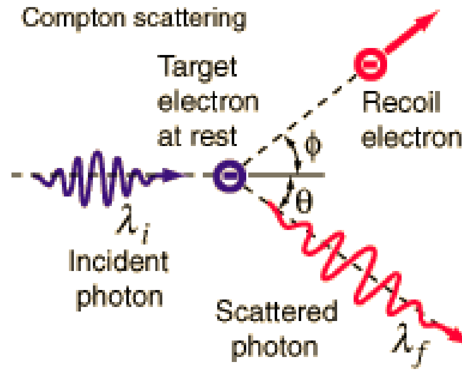
ظاهرة كمبتن Compton Effect

خلال دراسة تشتت أشعة X عن المادة لاحظ أرثر كمبتن عام 1923 أن الأشعة المتشتتة عن السطوح تمتلك أطوالا موجية أكبر من الأطوال الموجية للأشعة الساقطة عليها. وبموجب النظرية الكهرمغناطيسية فإن الطول الموجي للإشعاعات المتشتتة ينبغى أن يكون مساويا للطول الموجي للأشعة الساقطة. وهذا يعني أن هنالك مشكلة من المطلوب حلها لتفسير الظاهرة. ومن الواضح أن النظرية الكهرمغناطيسية تخفق مرة أخرى في تفسير تصرف الإشعاعات القصيرة وعلاقتها بالمادة. لذلك قدم كمبتن تفسيره للظاهرة على أساس أن الإلكترونات الحرة في المادة تمتص جزء من الطاقة التي تحتويها فوتونات أشعة X فتنطلق

بطاقة حركية تتناسب مع الطاقة التي امتصتها فيما تتشتت فوتونات X بطاقة أقل أي بطول موجي أكبر. والفرق بين الطول الموجي للأشعة الساقطة λ_i والمتشتتة λ_f بموجب حسابات كمبتن هو

$$\lambda_f - \lambda_i = \frac{h}{mc}(1-\cos\theta) \qquad (1.9)$$

حيث أن m هي كتلة الإلكترون الساكن و θ هي زاوية تشتت فوتون أشعة X.



الشكل (1–5) ظاهرة كمبتن

هذه الظاهرة تؤكد أن للفوتونات زخماً يمكن أن تتبادله مع الجسيمات (الإلكترونات) وهنا نجد مرة أخرى أن للطاقة صفات جسيمية، حيث أن تبادل الزخم هو بالأساس صفة جسيمية وفي العادة فإن الطاقة الكهرمغناطيسية يمكن أن يكون لها ضغط ولكنها لا تتبادل الزخم. لكننا هنا أمام حقيقتين:

- كمومية الطاقة الكهرمغناطيسية.
- تمتع كمات الطاقة (الفوتونات) بالصفة الجسيمية.

لذلك أدرجت ظاهرة كمبتن ضمن الظواهر التي مهدت لظهور فيزياء الكموم.

تمرين: إلكترون طاقته الحركية 100 مليون إلكترون فولط يصطدم بفوتون طول موجته 3×10^6 نانومتر فما مقدار أعظم طاقة يمكن للفوتون أن يفقدها؟

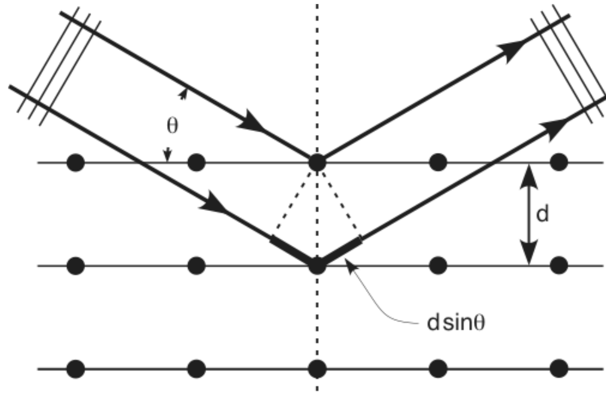
الحل متروك للطالب

حيود الإلكترونات Electron Diffraction

وهذه ظاهرة أخرى عجيبة تتصرف فيها الإلكترونات ليس كجسيمات مثلما عهدناها في حركتها في انبوبة أشعة المهبط Cathode-ray tube بل كأمواج هذه المرة. فقد لوحظ أن تسليط حزمة من الإلكترونات على سطح فلزي بلوري يؤدي إلى ظهور أهداب تداخل شبيهة بتلك التي تظهر حينما تخترق أشعة الضوء شقاً ضيقاً حيث تظهر أهداب الحيود المتتابعة المعتمة والمضيئة. وقد وجد في التجارب أن انتظام أهداب الحيود يخضع للعلاقة

$$2d\sin\theta = n\lambda \qquad (1.20)$$

ويسمى هذا قانون براغ Bragg law. حيث أن d هي المسافة بين المستويات البلورية وأن n هي رتبة الهدب و θ هي الزاوية بين الشعاع الساقط وسطح البلورة.

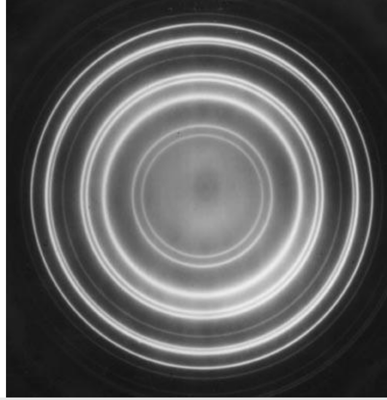


الشكل (1−6) حيود الإلكترونات

وقد إجريت مؤخرا تجربة تم بموجبها تسليط حزمة خافتة جدا (أي ذات شدة قليلة جدا) من الإلكترونات على شقين متجاورين هما عبارة عن الفراغات بين السطوح البلورية لبعض المواد فكان أن تشكلت حزم الأهداب المعتمة والمضيئة تدريجيا مع تتابع عبور الإلكترونات

خلال الشقين المتوازيين. وكما مبين في الصورة أدناه. إن هذه الظاهرة جاءت لتؤكد الطبيعة الموجية للإلكترونات وقد كنا نعدّها من قبل جسيمات. وهذه صفة غير كلاسيكية دون شك.

وتوجد في مختبر الفيزياء الحديثة تجربة تظهر حيود الأشعة السينية عند مرورها من خلال بلورة حيث تظهر بوضوح حلقتين من حلقات الحيود. ويمكن للطالب أن يتحقق فيها من قانون براج وحساب المسافة بين المستويات البلورية.



الشكل (1–7) أهداب التداخل في حيود الإلكترونات

تداخل الجسيمات المارة عبر شقين

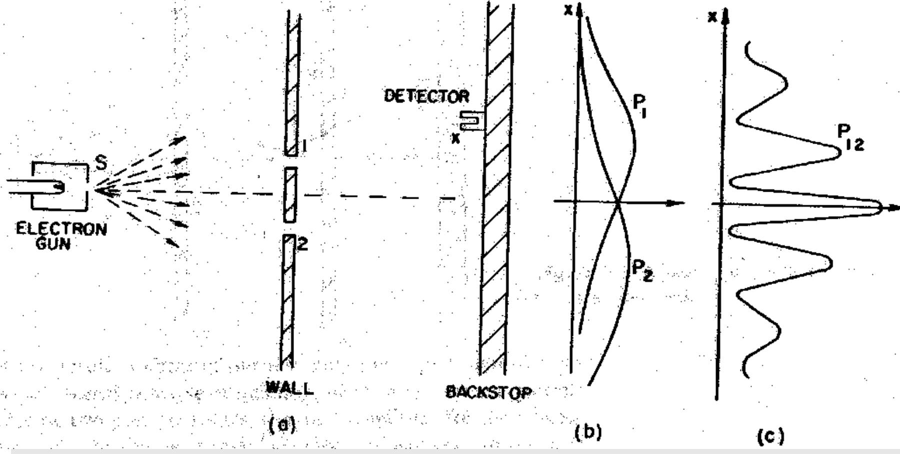
هذه التجربة هي من أهم ركائز التصور الموجي للجسيمات وهي مسألة أساسية ومهمة في ميكانيك الكموم وتأسيس الطبيعة الثنائية للجسيمات. وتسمى Double Slit Experiment. وقد كانت ظاهرة تداخل الأمواج معروفة منذ النصف الثاني من القرن التاسع عشر في مجال الضوء وعلم البصريات الفيزيائية لكنها صارت ذات أهمية أكبر عندما أثبتت تجريبياً على الجسيمات الكتلوية.

وخلاصة التجربة أننا لو جئنا بعدد كبير من الجسيمات ورميناها على شق طولي منفرد فإنها سوف تعبر الشق وترتطم بالحاجز الذي يقع خلف الشق (أنظر الشكل 1-8)



الشكل (1-8) الحيود من شق واحد

وتشكل صورة للشق على الحاجز. لكننا لو استبدلنا الشق المنفرد بآخر مزدوج وأطلقنا الجسيمات فإننا سنجد أن هذه الجسيمات تشكل على الحاجز توزيعا نمطياً يماثل أهداب التداخل التي نجدها عندما نطلق حزمة من الضوء على الشق المزدوج. والسؤال الكبير الذي نقف أمامه يقول: إذا كانت الأمواج تتداخل مع بعضها بركوب القمة على القعر (التداخل الهدام) وتتداخل بركوب القمة على القمة والقعر على القعر (التداخل البنّاء) فكيف للجسيمات أن تتداخل مع بعضها هكذا؟ إن هذا لا يمكن أن يكون مفهوماً لأنه يعني أن الجسيمات تأكل بعضها كما تأكل الأمواج بعضها. لكن الأمواج هي أنماط هندسية متحركة على حين أن الجسيمات هي كينونات ثابتة ومتحيزة أي تشغل حيزاً من المكان. فكيف يمكن أن نقبل القول بأن الجسيمات تتداخل مع بعضها. إن الأمواج الساقطة على الحاجز ذي الثقبين تنقسم ويصبح كل ثقب هو مصدر جديد للأمواج، ولكن كيف يحصل هذا مع الجسيمات؟ هذا ما حيّر الفيزيائي ريتشار فريدمان وجعله يقول "إن من يعتقد أنه قد فهم ميكانيك الكم فإنه لم يفهم شئ". وهذا القول يصح ربما على عهد فريدمان لأنهم كانوا غير قادرين على تصور هوية أخرى غير الجسيم والموجة.

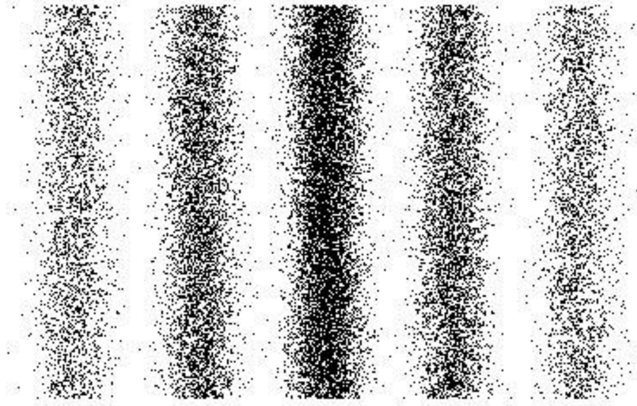


الشكل (1–9) الحيود من شقين

والآن لو أننا أغلقنا أحد الشقين فإن الحالة ستكون أن لدينا شق منفرد ولا يظهر نمط التوزيع الهدبي. (ملاحظة: ممكن أن يظهر توزيع هدبي ناشئ عن الحيود من شق واحد وهذه أهداب الحيود وهي غير أهداب التداخل). من جانب آخر فإن تفسير ظاهرة التداخل يقوم على فكرة أن الموجة ممتدة وبالتالي فإن الموجة نفسها إذ تتداخل مع نفسها فذلك لأن كل جزء منها (على جبهة الموجة) هو بمثابة مصدر جديد للأمواج كما قلنا، هكذا تعلمنا من دراسة حركة الأمواج، بالتالي فإن ظهور أهداب التداخل في حالة الأمواج ليس غريباً. لكننا الآن أما الجسيمات وهي تشكل أهداب تداخل نكون أمام معضلة حقيقية فالجسيمات متحيزة Localized.

ربما يقول قائل إن حزمة من الجسيمات تقع على الشقين ربما أدت أن تتداخل جسيمات مختلفة مع بعضها فتعطينا التوزيع الهدبي كتعبير عن التوزيع الإحتمالي لمواقع الجسيمات. والى جانب أن مثل هذا التوزيع الإحتمالي بحاجة إلى تفسير أيضاً فإن العجب العجاب يحصل حين نعلم أن هذه التجربة نفسها قد أجريت مؤخرا باستخدام حزمة إلكترونية ضعيفة الشدة تم حسابها وتصميمها بحيث يمر إلكترون واحد فقط من الشقين. وبعد

انتظار وجد الباحثون أن نظام التوزيع الهدبي يظهر على الشاشة تدريجيا أي يتم بناؤه تدريجياً قطعة قطعة مما يعني أن الإلكترون الواحد قد مرة خلال الشقين في آن واحد. فكيف يحصل ذلك؟ ليس لدى الفيزيائيين إجابة واضحة عن هذا السؤال إنما تجدهم يقولون هذه هي الطبيعة الكمومية الغريبة للجسيمات، وكفى!



الشكل (1-10) أهداب الحيود من شقين

البنية الذرية

خلال القرنين الثامن والتاسع عشر وجد الكيميائيون أن المواد يمكن تقسيمها إلى عناصر Elements ومركبات Compounds. فالعناصر هي عوامل أساسية لا يمكن اختزالها إلى ما هو أبسط منها (راجع الجدول الدوري للعناصر الطبيعية). وفي الطبيعة يتوفر 92 عنصراً طبيعياً أبسطها هو عنصر الهيدروجين H ثم الهيليوم He وهكذا. وأغلب المواد التي نتعامل معها في حياتنا اليومية هي ليست عناصر أساسية بل هي مركبات مؤلفة من هذه العناصر. وقد كان التفكير السائد أن العناصر تتألف من ذرات هي عبارة عن كرات مصمتة لا تركيب داخلي لها وأن المركبات تتألف من جزيئات تتكون بإتحاد ذرات العناصر مع بعضها، حيث تنشأ أواصر كهربائية بين تلك الذرات. وعلى هذا الأساس تعامل الكيميائيون مع

المواد المختلفة. كما كان الكيميائيون قد وجدوا أن تفاعل العناصر مع بعضها لتأليف المركبات يبدو وكأن قطر ذرات العناصر يقع في حدود 10^{-8} سنتيتمر. من جانب آخر تعامل الفيزيائيون مع المركبات وخاصة الغازات وفق التصور نفسه لتركيب المادة واعتمدوا ما يسمى النظرية الحركية للغازات حيث تمكن بولتزمان من وضع بنية حسابية تقوم على نظرية العدد والإحتمالات فيما سمي إحصاء بولتزمان Boltzmann Statistics والذي تمكن من خلاله ذلك الفيزيائي المبدع من اشتقاق معادلات الثرموداينميكس على أسس البنية الجزيئية للغازات. وإحصاء بولتزمان اليوم هو أحد أهم مكونات الميكانيك الإحصائي. إلى جانب ذلك كان بعض الفيزيائيين منهمكين بدراسة اطياف المواد على اختلاف أنواعها وقد تمكنوا من وضع كاتلوجات لأطياف كثير من العناصر مما جعل علم الطيف أداة تقنية في تحليل المواد والتعرف على المركبات والعناصر.

لذلك ومع تدفق المعلومات والاكتشافات صار من الضروري وضع تصور للبنية الذرية لمعرفة كيفية تفاعل العناصر والمركبات مع بعضها وفهم هذه الظواهر من أجل التحكم بها.

الواقع التجريبي للأطياف الذرية

عند تسخين المواد أو تعريض أبخرتها التي تكون تحت ضغط واطئ إلى جهد كهربائي عالي تنطلق عنها إشعاعات كهرومغناطيسية بأطوال موجية مختلفة وقد كانت تحليلات وقياسات الأطياف المنبعثة قد كشفت عن علاقات تجريبية Empirical تحدد الأطوال الموجية للضوء المنبعث، وقد تبين أن هنالك سلاسل طيفية عديدة وهي كما يلي

سلسلة ليمان Lyman Series: والعلاقة المستنبطة تجريبيا التي تحددها هي

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2}\right) \qquad (1.21)$$

حيث تكون $n = 2,3,4....$ وحيث أن R هو ثابت ريدبرج ومقداره $1.096\times10^{7}\,m^{-1}$.

تقع معظم الخطوط الطيفية لسلسلة ليمان في المنطقة البنفسجية وفوق البنفسجية.

سلسلة بالمر Balmer Series: والعلاقة المستنبطة تجريبيا التي تحددها هي

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right) \qquad (1.22)$$

حيث تكون $n = 3,4,5....$

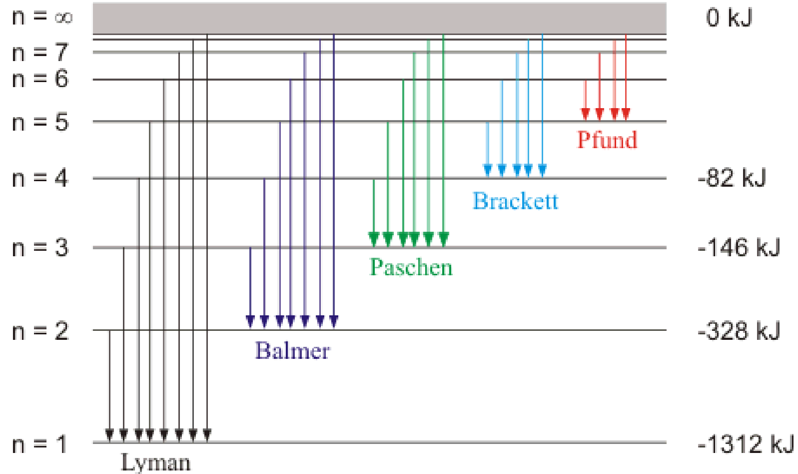
تقع معظم الخطوط الطيفية لسلسلة بالمر في منطقة الضوء المرئي وهذا هو من أهم الأسباب للإهتمام بها.

سلسلة باشنPaschen Series: والعلاقة المستنبطة تجريبيا التي تحددها هي

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2}\right) \qquad (1.23)$$

حيث تكون $n = 4,5,6,.....$

وهكذا فقد وجدت صيغ وضعية عديدة لسلاسل الطيف المنبعث من الذرات دون أن توجد نظرية واحدة تُفسر ظهور هذه الأطياف.



الشكل (1–11) طيف الإنبعاث لذرة الهيدروجين

مثال (1): ما هو نطاق الأطوال الموجية لسلسلة لايمان؟

الجواب: أقصر طول موجي في سلسلة لايمان نجده من

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{\infty^2}\right) = 1.096\times10^7\ \mathrm{m}^{-1}$$

أي أن $\lambda = 0.912\times10^{-7}\,\mathrm{m} = 912\,\mathrm{A}$ أي في المنطقة فوق البنسفجية

وأطول موجة نجدها من انتقال الإلكترون من المستوى الثاني إلى المستوى الأول. أي

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) = 1.096\times10^7 \times \frac{3}{4}\ \mathrm{m}^{-1}$$

أي أن $\lambda = 1.216\times10^{-7}\,\mathrm{m} = 1216\ \mathrm{A}$ وهو في المنطقة فوق البنفسجية. وهذا يبين أن جميع خطوط سلسلة لايمان تقع في المنطقة فوق البنفسجية.

مثال (2): ما هو أقصر طول موجي في سلسلة بالمر وما الموجة الأطول؟

الجواب: الأقصر هو الطول الموجي الذي يمثل أعظم طاقة وهو الذي يمثل انتقالا أكترونيا من المالانهاية وحتى $n=2$ أي أن

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{\infty^2}\right) = \frac{1.096\times10^7}{4}$$

أي أن $\lambda = 3.65\times10^{-7}\,\mathrm{m} = 3650\,\mathrm{A}$ وهذا يقع في المنطقة البنفسجية.

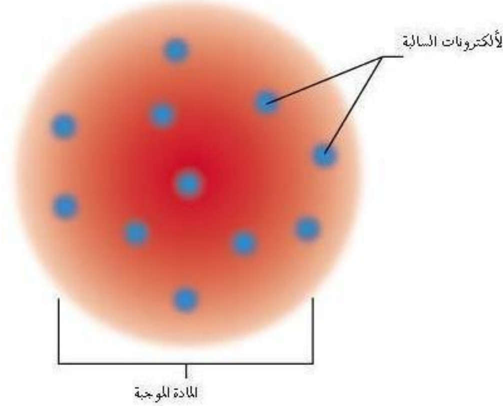
أما أطول موجة فهي التي تنبعث عند انتقال الإلكترون من المستوى الثالث إلى المستوى الثاني وهذا يعني أن

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) = 1.096\times10^7 \times \frac{5}{36}$$

أي أن $\lambda = 6.561\times10^{-7}\,\mathrm{m} = 6561\mathrm{A}$ وهذا الخط يقع في المنطقة المرئية من الطيف. وبهذا نفهم ربما كان الإهتمام بخطوط سلسلة بالمر أكثر من غيرها من السلاسل فالسبب أنها تشتمل على المنطقة المرئية من الطيف الكهرمغناطيسي.

نموذج رذرفور للذرة

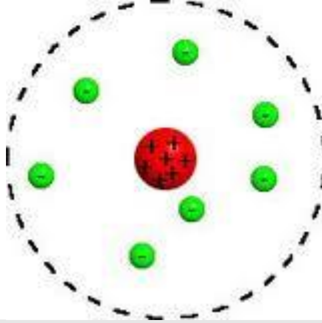
بعد أن اكتشف ثومسون وجود الشحنات السالبة في باطن الذرة ظن أن الذرة المتعادلة هي عبارة عن كرة صغيرة جداً تحتوي مادة موجبة تنغرز فيها الإلكترونات كما تنغرز حبات الزبيب في الكيك. لكن اللورد رذرفورد الذي كان يجري أبحاثه في جامعة مانشستر أجرى عام 1911 تجربة شهيرة كان هدفها التأكد من صحة نموذج ثمسون.



الشكل (1-12) نموذج ثمسون للذرة

تتلخص هذه التجربة بوضع شريحة رقيقة من معدن الذهب في طريق حزمة من جسيمات ألفا (وهي نوى ذرات الهليوم تمتلك شحنة مقدارها +2) والتي تنطلق من نوى ذرات الثوريوم ومراقبة ما يحصل لمساراتها. وقد كان رذرفورد قد توقع أن تمر هذه الجسيمات خلال شريحة الذهب الرقيقة دون تأثير يذكر إذا كان نموذج ثمسون صحيحاً. لكنه فوجئ بأن وجد جسيمات ألفا تنحرف أحيانا إنحرافات شديدة وبعضها يرتد منعكساً إلى الخلف. وهذه

النتائج التي حصل عليها تبين أن الجزء الموجب من الذرة يقبع في حيز صغير جداً منها سمي النواة Nucleus على حين أن الإلكترونات تكون خارجها.



الشكل (1–13) ذرة رذرفورد

ولكي تكون الذرة مستقرة وتمنع إنهيارها فإن على الإلكترونات أن تدور حول النواة في نموذج كوكبي. لكن النظرية الكهرمغناطيسية تقرر أن دوران الإلكترونات وتعرضها للتسارع سيسبب إشعاعها لطاقة الوضع الكهربائية التي تمتلكها وبالتالي فإن الذرة ستنهار خلال زمن قصير جداً بحدود 10^{-11} ثانية ولن يبقى في العالم ذرات مما جعل نموذج رذرفورد في موقف صعب أزاء هذه المعلومات النظرية.

نموذج بور للذرة

حاول نيلز بور الدنيماركي التغلب على الصعوبات التي واجهها نموذج رذرفورد للذرة. وقد تأمل في ضرورة وجود شروط محددة تمنع الإلكترون من الاشعاع. والحقيقة إن بور كان يفكر في مثل هذه الشروط وأمامه النتائج التجريبية للأطياف الذرية. أي إنه كان يعرف أن الضوء الصادر عن الأجسام الساخنة يمكن أن يكون ناتجاً عن انتقال الإلكترونات في

مواضعها حول النواة. لكن المشكلة هي كيف يمنع إشعاع الإلكترون للطاقة بينما هو دائر في مداره؟

افترض بور مايلي:

1. أن الإلكترونات تدور حول نواة الذرة في مدارات دائرية تامة.
2. أن هذه الإلكترونات لا تشع طاقة أثناء دورانها عندما تكون قيمة الزخم الزاوي فيها مساوية لأعداد صحيحة من ثابت بلانك مقسوما على 2π. أي

$$mvr = n\hbar, \qquad n = 1, 2, 3.... \tag{1.24}$$

حيث أن m هي كتلة الإلكترون و r بعده عن البروتون (أي نصف قطر المدار في ذرة الهيدروجين) و v هي سرعته المدارية تأخذ n عدداً صحيحاً أي 1، 2، 3، وهكذا.

3. إن انتقال الإلكترون من مستوى أدنى (أقرب الى نواة الذرة) الى مستوى أعلى (أبعد عن نواة الذرة) يحصل عندما تمتص الذرة طاقة مساوية للفرق بين طاقتي الإلكترون في المستويين الأدنى والأعلى. وإن أنتقال الإلكترون من مستوى أعلى الى مستوى أدنى يؤدي الى إنبعاث طاقة مقدارها يساوي الفرق بين طاقة الإلكترون في المستويين.

أقام بور نموذجه على أساس تساوي القوة المركزية التي يتحرك بها الإلكترون مع قوة الجذب الكهربائي بين الإلكترون والبروتون، أي وضع

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2} \tag{1.25}$$

ومنها وجد أن

$$v^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{mr}$$

أي أن

$$\text{v} = \frac{e}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 mr}} \tag{1.26}$$

وهنا أدخل فرضيته في تكميم الزخم الزاوي حيث أن العلاقة (1.24) تعطينا

$$\text{v} = \frac{n\hbar}{mr}$$

وبالتعويض في المعادلة (1.25) نجد أن

$$\frac{m\text{v}^2}{r} = \frac{n^2\hbar^2}{mr^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}$$

ومنها نجد أن

$$\begin{aligned} r_n &= \left(\frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2}\right)n^2 \\ &= a_0 n^2 \end{aligned} \tag{1.27}$$

حيث أن

$$a_0 = \left(\frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2}\right) = 0.529\times 10^{-10}\ \text{m} \tag{1.28}$$

هو ما سمي نصف قطر بور Bohr Radius وهو أقرب مدار للإلكترون للنواة.

حساب طاقة الإلكترون

إن الطاقة الكلية للإلكترون في ذرة الهيدروجين هي مجموع طاقته الحركية المدارية وطاقة الوضع الكهربائية التي يمتلكها وهذا هو

$$\begin{aligned} E &= K.E + P.E \\ &= \frac{1}{2}m\text{v}^2 - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r} \end{aligned} \tag{1.29}$$

وبالتعويض عن v من المعادلة (1.26) نجد أن

$$E = -\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r} \tag{1.30}$$

والآن لو عوضنا في هذه النتيجة عن r من المعادلة (1.27) لوجدنا أن

$$E_n = -\left(\frac{1}{2}\right)\frac{me^4}{(4\pi\varepsilon_0\hbar)^2}\frac{1}{n^2} = \frac{E_1}{n^2} \tag{1.31}$$

$$E_1 = -\left(\frac{1}{2}\right)\frac{me^4}{(4\pi\varepsilon_0\hbar)^2} = -13.6\ eV \tag{1.32}$$

وهو طاقة الحالة الدنيا Ground State Energy لذرة الهيدروجين وهو مقدار ثابت. وهذا المقدار من الطاقة هو نفسه مقدار طاقة التأين Ionization Energy لذرة الهدروجين، وهو بذات الوقت مقدار طاقة الربط Binding Energy للإلكترون في ذرة الهيدروجين حيث أن الإلكترون الحر وهو يأتي ليرتبط بالذرة في أدنى المستويات ويصبح أسيرا لنواتها فإنه يدفع مهر هذا الأسر من طاقة وضعه حين كان حراً، حتى إذا ما أردنا تخليصه منها وجب علينا أن ندفع فدية خلاصه منها.

إن الصيغة (1.31) لطاقة الألكترون تكشف أنها سالبة على الدوام وسبب ذلك أن الإلكترون منجذب دوماً إلى نواة الذرة وإن طاقته تزداد كلما زادت رتبة المستوى الذي هو فيه حتى تكون أعلى قيمة لها هي صفر وعنئذ يكون الإلكترون حراً.

تحقيق السلاسل الطيفية

وفقا لتصور بور فإن انتقال إلكترون من مستوى أعلى n_i إلى مستوى أدنى n_f يسبب انطلاق إشعاع كهرمغناطيسي مقدار طاقته هو مقدار الفرق بين طاقة الإلكترون في المستويين وهي

$$\Delta E = E_i - E_f = E_1\left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_f^2}\right) \quad n_i > n_f \tag{1.33}$$

وهكذا فإن الطول الموجي للشعاع المنبعث يحسب حسب العلاقة

$$\frac{hc}{\lambda} = E_1\left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_f^2}\right)$$

بمعنى أن

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{E_1}{hc}\left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_f^2}\right) = R\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right)$$

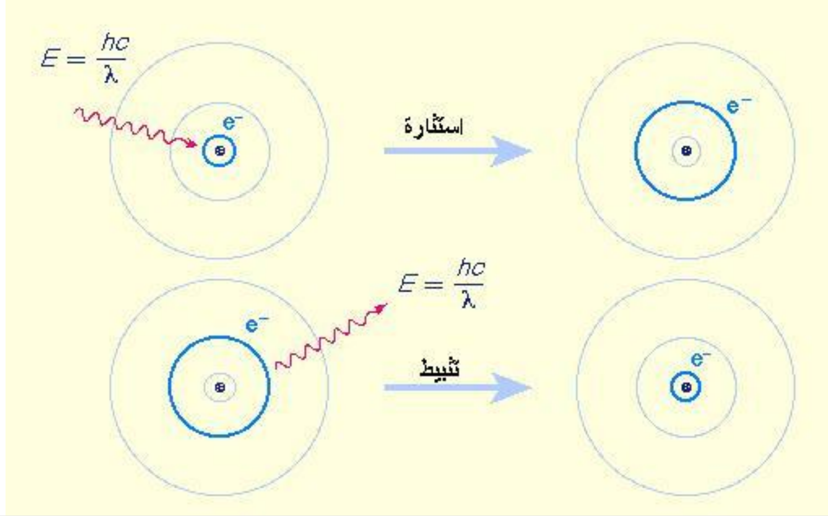
(1.34)

حيث أن R هو ثابت ريدبرج Raydberg constant. وقيمته $1.0973731\times10^7 m^{-1}$ وبموجب نموذج بور يتحقق أن هذا الثابت يمكن كتابته بدلالة الثوابت الأساسية كما يلي

$$R = \frac{me^4}{8\varepsilon_0{}^2 h^3 c}$$

إن انتقال الإلكترون من مدار لآخر حول النواة يغير من طاقته الميكانيكية الكلية. ولما كانت هذه الطاقة تتوزع على مقادير مخصوصة تتناسب مع المدارات المخصوصة للإلكترون فإن كمية الطاقة التي يمتصها الإلكترون في حالة انتقاله إلى مدار أعلى والطاقات التي يبعثها عند انتقاله إلى مدارات أدنى تكون قيماً مخصوصة عادة ولا تكون طيفاً مستمراً بل هي

على الحقيقة خطوط طيفية محددة يُعرّفها مقدار الفرق بين طاقة الإلكترون في المدار الذي انتقل منه والمدار الذي انتقل إليه وهذه القيمة تحددها العلاقة



الشكل (1–14) انبعاث الضوء وامتصاصه في الذرات

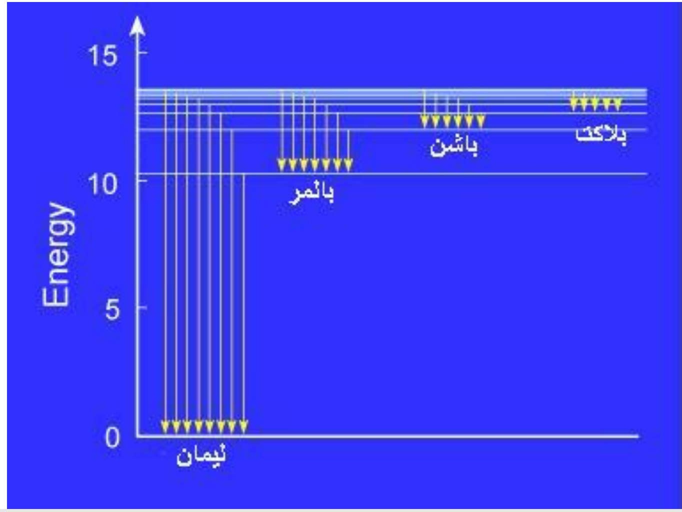
$$\Delta E = hcR\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right) \qquad (1.35)$$

هذه الطاقة هي بالضبط طاقة الفوتون الذي يتم امتصاصه أو بعثه من الذرة. n_i هو المستوى الإبتدائي و n_f هو المستوي النهائي. وباستخدام فرضية بلانك نجد أن تردد الضوء المنبعث هو

$$\nu = cR\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right) \qquad n_i > n_f \qquad (1.36)$$

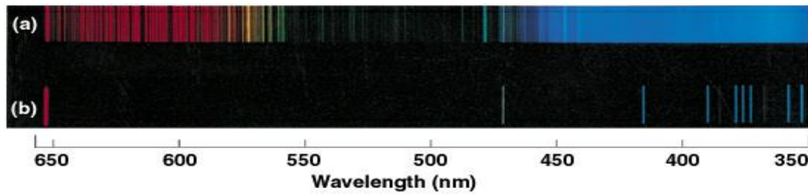
وبدلالة الطول الموجي للضوء المنبعث يكون

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right) \qquad (1.37)$$



الشكل (1–15) السلاسل الطيفية

وهكذا تتضح الصورة أمامنا الآن ونفهم منشأ السلاسل الطيفية إذ أن انتقال الإلكترون من أي مدار إلى المدار الأول أي الذي له $n=1$ سيؤدي إلى انبعاث عدة أطوال موجية والمجموعة المؤلفة من هذه الأطوال الموجية تسمى سلسلة ليمان Layman Series.. أما انتقال الإلكترون من أي مدار إلى المدار الثاني أي الذي له $n=2$ فإنه سيؤدي إلى انبعاث عدة أطوال موجية أيضاً تؤلف سلسلة تختلف عن الأولى وهذه تسمى سلسلة بالمر Balmer Series.. وهكذا فإن مستقر سلسلة باشن هو المدار الذي له $n=3$ ومستقر سلسلة بلاكت هو $n=4$. ويرمز إلى الخطوط الطيفية المختلفة في كل سلسلة بالحروف اليونانية... $\alpha\beta\gamma$ فيسمى الخط الأول منها α والثاني β والثالث γ وهكذا.



الشكل (1–16) طيف ذرة الهيدروجين



الشكل (**17–1**) طيف الهيليوم

بعد ذلك جرى تدقيق نموذج بور الذري من قبل الفيزيائي سمرفيلد وآخرين حتى صار اليوم وصف الأطياف الذرية قريبا جداً من الواقع.

خط الهيدروجين H_α

ينطلق هذا الخط عندما ينتقل الإلكترون في ذرة الهيدروجين من المستوى الثالث إلى المستوى الثاني وهذه هي الموجة الأطول في سلسلة بالمر. ويمكن حسابه بدقة كما يلي

$$\frac{1}{\lambda_{H_\alpha}} = R\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right)$$

وهذا يعني أن

$$\lambda_{H_\alpha} = \frac{1}{0.13888\,R} = 656.11\,\text{nm}$$

ويعتبر هذا الخط من الخطوط المهمة جدا في التطبيقات الفيزيائية إذ أنه مرجع مهم في دراسة فيزياء النجوم Astrophysics نظرا لتوفر الهيدروجين على نطاق واسع في الكون. لذلك فإن حصول أي إزاحة على هذا الخط يمكن أن تُخبرنا عن كثير من المعلومات المحيطة بالذرة التي أطلقت هذا الخط من مكان تواجدها.

تضمين حركة النواة في حساب الطاقة

من المعلوم أن الإلكترون ونواة الذرة يشكلان نظاما ديناميكيا واحداً بينهما قوة تجاذب كهربائي مشتركة هذه القوة تجعل كلا الجسمين يدور حول مركز الكتلة الذي يقع قريبا من الجسيم الأكبر كتلة وهو نواة الذرة. ويمكن حساب نصف قطر الدائرة التي يدور فيها الإلكترون من العلاقة

$$r_e = \frac{m_n}{m_n + m_e} r \qquad (1.38)$$

ولما كانت $m_n = 1837 m_e$ فإن الناتج سيكون قريبا من r. وفي الحسابات السابقة لطاقة الإلكترون أهملنا هذا التأثير فكأننا أعتبرنا كتلة نواة الذرة مالانهاية لذلك اعتبرناها ثابتة. ويمكن الإستعاضة عن تأثير الحركة حول مركز الكتلة باعتماد الكتلة المختزلة للإلكترون reduced mass فإذا استعملناها بدلا عن كتلة الإلكترون أصبح تأثير مركز الكتلة داخل في الحساب ضمنياً. والكتلة المختزلة في ذرة الهيدروجين هي

$$\mu = \frac{m_n m_e}{m_n + m_e} = \frac{1837}{1837 + 1} m_e = 0.99946\, m_e \qquad (1.39)$$

فهي قريبة جدا من كتلة الإلكترون إذن. بالتالي يمكن كتابة الطاقة الكلية للإلكترون كما يلي

$$E_n = -\left(\frac{1}{2}\right) \frac{\mu e^4}{(4\pi\varepsilon_0 \hbar)^2} \frac{1}{n^2} \qquad (1.40)$$

وتكتب هذه بدلالة ما يسمى ثابت التركيب الدقيق وكما يلي

$$E_n = -\left(\frac{\mu c^2}{2}\right) \frac{\alpha^2}{n^2} \qquad (1.41)$$

حيث أن

$$\alpha = \frac{e^2}{(4\pi\varepsilon_0 \hbar c)} \approx \frac{1}{137} \qquad (1.42)$$

هو مقدار ثابت يسمى ثابت التركيب الدقيق Fine Structure Constant.

إكتشاف الديوتيريوم

إن إدخال حركة النواة في الحساب يؤدي إلى حصول فرق في حساب مواقع خطوط الطيف وهذه النتيجة النظرية يمكن أن تؤدي إلى نتائج عملية واكتشافات مهمة. مثلا

لاحظ الفيزيائيون العاملون في فحص أطياف المواد وجود خط ضعيف جدا عند الطول الموجي $\lambda = 656.3\ \text{nm}$ وهذا هو ليس خط H_α بالضبط الذي يقع عند $\lambda = 656.1\ \text{nm}$ مما جعلهم يبحثون عن السبب وهنالك تبين أن هذا الخط ينتج من ذرة نظير الهيدروجين الذي سمي الديوتيريوم ونواته تحتوي على بروتون واحد ونيوترون واحد وإذا ما اعتبرنا أن كتلة النيوترون مساوية تقريبا لكتلة البروتون أمكننا حساب الطول الموجي المنبعث من هذه الذرات كما يلي:

$$\frac{1}{\lambda} = R_\mu \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9} \right)$$

حيث أن $R_\mu = 1.0971 \times 10^{7}\ \text{m}^{-1}$

ومنها نجد أن

$$\lambda_{D_\alpha} = \frac{1}{0.13888 R_\mu} = 656.32\ \text{nm}$$

إن الفرق الذي مقداره 0.21 نانو متر في الطول الموجي دلنا على وجود نظير الهيدروجين الديوتيريوم. وإن خفوت سطوع الخط دلت على نسبة الديوتيريوم القليلة.

نموذج بور للذرة والنظرية الكهرمغناطيسية

بموجب النظرية الكهرمغناطيسية فإن الأجسام المشحونة المتحركة بتسارع يجب أن تشع طاقة. ولما كان الإلكترون في دورانه حول النواة في حالة تسارع فإنه لا بد وأن يشع طاقتة الكلية ويسقط على نواة الذرة. وهذا ما كان ليحصل للإلكترون لولا أنه منحبس عن إطلاق الطاقة بسبب تكميم الزخم الزاوي في مدارات معينة. ولكن حين ينتقل الإلكترون من مدار إلى آخر فإنه ولابد سيخرج من حصن المدار وبالتالي سيصبح عرضة لإطلاق الطاقة. فكيف لا يحصل هذا وكيف لا تنهار بنية الذرة أثناء الانتقالات الإلكترونية؟

قيل أن الإلكترون حين ينتقل من مدار إلى آخر فإنه يختفي من موضع ويظهر في موضع آخر. لكننا لسنا بحاجة إلى مثل هذا التصور الغريب. ولو حسبنا الفترة الزمنية اللازمة لكي يفقد الإلكترون جميع طاقته ويقع على نواة الذرة فإنها بحدود 10^{-11} ثانية. (أنظر المسألة 10 آخر هذا الفصل)

بالتالي فلو كان الإلكترون ليبقى دائرا حول النواة نحواً من هذه المدة أثناء انتقاله من مدار إلى آخر فإنه سيفقد طاقته بالإشعاع. لكنه في واقع الحال لا يمكث أثناء انتقاله بين مدار وآخر أكثر من 10^{-21} ثانية وهذا زمن قصير جدا لا تكاد كهرمغناطيسية ماكسويل أن ترى الإلكترون فيه. وهذا هو السبب في أن الطاقة الإلكترونية لا تشع وتبقى الذرات مستقرة رغم حصول الإنتقالات بين المدارات.

نموذج بور ما له وما عليه

لقد وظّف نموذج بور فكرة تكميم الطاقة التي جاء بها ماكس بلانك، وأضاف فكرة تكميم الزخم الزاوي وهي فكرة جديدة. ولقد نجح هذا النموذج في تفسير السلاسل الطيفية للهيدروجين على وجه الخصوص بحسابه الأطوال الموجية للخطوط البراقة والمعتمة التي تظهر عند تسخين المواد أو عمل تفريغ كهربائي في غازات أو أبخرة تحت ضغوظ واطئة. بل صار ممكنا بعده فهم سبب ظهور الطيف الخطي البراق. لكن بقيت عدة أمور لم تزل غير مفهومة ومنها ما يلي:

وجود فرق في الأطوال الموجية للعناصر الأعلى من الهيدروجين في الجدول الدوري.

وجود فروقات صغيرة في أطياف نظائر العناصر.

حصول إنشطار في خطوط الأطياف الذرية عند تعريضها لمجال مغناطيسي خارجي.

لقد أدرك الفيزيائيون أن نموذج بور ليس إلا خطوة أولية لتصوير ميكانيكية الذرة إلا أنه لا يصلح للوصف الدقيق لها. ولم يتمكن الفيزيائيون من تحقيق التوافق بين النظرية ونتائج التجارب إلا بعد أن وضعوا نموذجاً أكثر تعقيداً يعتمد التصور الموجي للمادة والحركة وهذا ما سنتعرف عليه في الفصول اللاحقة.

صورة الذرة اليوم

بعد تطور الحسابات الرياضية للذرات تبين أن الإلكترونات هي حالات هلامية وأنها تشكل أشبه ما يكون بالسحابة تحيط بنواة هلامية هي الأخرى صغيرة جدا ولا تستقر هذه الصورة على حال إذ هي في حالة تغير دائم. وإن ما نضعه في الرسومات ليس إلا تشبيها تقريبياً للواقع. فنواة الذرة هي جزء صغير جدا يقع في مركزها تحيط به سحابة إلكترونية والتوزيع الإلكتروني في هذه السحابة أشبه بالتوزيع الهلامي. إذ أن الإلكترونات تتحرك بسرعة كبيرة ولا تهدأ طالما أن هنالك طاقة خارجية تمتصها وطاقة تبثها. وكثير من الإلكترونات تنتقل بين مستويات الطاقة باعثة إشعاعا غير مرئي كأن يكون إشعاعا حراريا أو إشعاعا راديويا. وفي كل الأحوال فإن المدارات الإلكترونية غير مستقرة كما نتخيل بل هي دائمة التغير. لذلك فإن تصورنا للذرة اليوم يختلف عن التصور التقليدي شبه السكوني الذي تبدو فيه الذرة وكأنها نظام كوكبي شبيه بالنظام الشمسي.

قاعدة التكميم لولسن سومرفيلد

حاول الفيزيائيون وضع قاعدة عامة للتكميم تشمل فرضية بلانك في تكميم الطاقة $E = nh\nu$ وفرضية بور لتكميم الزخم الزاوي. وقد تبادر الى تفكير الفيزيائيين ولسن وسومرفيلد عام 1916 أن هذا التكميم سببه قانون أكثر عمومية ينطبق على النظم الفيزيائية الدورية وهذه القاعدة تقوم على تكميم الفعل action وتقرر أن

$$\oint pdq = nh$$

حيث أن $n = 0,1,2,3,....$ هو عدد كمي و p هو الزخم القرين للإحداثي q ويجري التكامل على دورة مغلقة كاملة. وقد سميت هذه العلاقة قاعدة ولسن سومرفيلد للتكميم

مثال تطبيقي (1): استنتاج فرضية بلانك للتكميم

فيما يلي سوف نوضح كيف أن قاعدة ولسن . سومرفيلد للتكميم يمكن أن تقودنا الى فرضية بلانك لتكميم الطاقة حيث نطبقها على متذبذب توافقي في بعد واحد كتلته m و يتراوح في حركته ما بين $-a \le x \le a$.

إن الطاقة الكلاسيكية لهذا المتذبذب هي

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

لذا فإن

$$p = \pm\sqrt{2mE - m^2\omega^2 x^2}$$

وبناءً على قاعدة التكميم. لا بد أن نلاحظ أنه عند نقاط الإستدارة الكلاسيكية المحددة بالقيم $x = -a, \quad x = a$ تكون الطاقة الكلية هي طاقة وضع فقط ذلك لأنه في هذه النقاط تكون الطاقة الحركية صفراً فيكون $E = V(\pm a) = m\omega^2 a^2 / 2$ أي $a = \sqrt{2E / m\omega^2}$. وهكذا إذا أخذنا $p(E, x) = \pm\sqrt{2mE - m^2\omega^2 x^2}$ فإن

$$\oint pdq = 2\int_{-a}^{a} \sqrt{2mE - m^2\omega^2 x^2}\, dx = 4m\omega \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

حيث ان $a^2 = \frac{2E}{m\omega^2}$ والآن لو فرضنا أن $x = a\sin\theta$ لغرض إجراء التكامل فإن

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta d\theta = \frac{\pi a^2}{4} = \frac{\pi E}{2m\omega^2}$$

حيث استخدمنا العلاقة

$$\cos^2\theta = (1+\cos 2\theta)/2$$

وبما أن $\omega = 2\pi\nu$ ، ولذا فإن

$$\oint pdq = \frac{2\pi E}{\omega} = \frac{E}{\nu} = nh$$

بمعنى أن $E = nh\nu$ وهذه هي فرضية بلانك بعينها.

وهكذا نجد أن قاعدة التكميم لبور سومرفيلد يمكن أن تفسر مشروعية فرضية ماكس بلانك التي استخدمها في حل مشكلة إشعاع الجسم الأسود.

مثال تطبيقي (2) أستنتاج فرضية بور لتكميم الزخم الزاوي

فيما يلي سنوضح كيفية استنباط فرضية بور لتكميم الزخم الزاوي من قاعدة ولسن ـ سومرفيلد. فلنفرض أن لدينا إلكتروناً يدور في مدار دائي نصف قطره r. إن الفعل هنا يتألف من الزخم الزاوي مضروبا في الإحداثي القرين له وهو الزاوية φ لذلك سيكون لدينا

$$\oint pdq = \int_0^{2\pi} L d\varphi = nh$$

ومنه نحصل على $2\pi L = nh$ وبالتالي فإن $L = \frac{nh}{2\pi}$ أي أن

$$mvr = n\hbar$$

وهذه هي قاعدة بور بعينها. وهو المطلوب.

أسئلة مفاهيمية للفصل الأول

إشعاع الجسم الأسود

1. ما الذي دفع ماكس بلانك الى دراسة الإشعاع الحراري؟ أين كانت المشكلة؟
2. ما هو الجسم الأسود المثالي؟ هل يمكن إعتبار الشمس جسم أسود. وكيف نحسب درجة حرارة سطحها؟
3. ما هو نطاق الترددات المنبعثة من جسم ساخن؟
4. ما هي علاقة الطول الموجي عند قيمة الطاقة الأعظم مع درجة حرارة سطح الجسم الساخن؟
5. ما هو قانون رايلي ـ جينز؟
6. ماذا كان الفرض الأساسي الذي وضعه ماكس بلانك وكيف عالج الطاقة داخل تجويف الجسم الأسود المثالي؟
7. أكتب قانون بلانك للتوزيع الحراري لجسم أسود مثالي على الترددات مابين v-$v+dv$.
8. إثبت أن قانون بلانك للتوزيع الطاقة يؤول الى قانون رايلي ـ جينز في نطاق الترددات الواطئة.
9. إثبت أن قانون بلانك للتوزيع الطاقة يؤول الى قانون ڤين في نطاق الترددات العالية.

التأثير الكهرضوئي

1. ماهي ظاهرة التأثير الكهرضوئي؟
2. كيف تتغير الطاقة الحركية للإلكترونات الضوئية عند تغيير شدة الضوء الساقط على السطح طبقا لنظرية ماكسويل الكهرمغناطيسية؟

3. كيف تتغير الطاقة الحركية للإلكترونات الضوئية عند تغيير شدة الضوء الساقط على السطح طبقا للتجربة المختبرية؟
4. كيف تتغير الطاقة الحركية للإلكترونات الضوئية عند تغيير تردد الضوء الساقط على السطح طبقا للتجربة المختبرية؟ إرسم علاقة عامة شكلية.
5. ما تردد العتبة Threshold Frequency؟ وما دالة الشغلWork Function؟
6. ما جهد الإيقاف في تجربة التأثير الكهرضوئي وما علاقته بتردد العتبة؟
7. كيف حل أينشتاين مشكلة التأثير الكهرضوئي وما هو إفتراضه الأساس؟
8. ما هو المفهوم المشترك بين حل بلانك لمشكلة إشعاع الجسم الأسود وحل أينشتاين لمشكلة التأثير الكهرضوئي?
9. صمم تجربة تتمكن من خلالها حساب ثابت بلانك.

تأثير كمبتن

1. ما هو تأثير كمبتن؟
2. ما الفرق بين تأثير كمبتن والتأثير الكهرضوئي؟
3. ما الذي يتضمنه تأثير كمبتن بخصوص خواص الضوء؟

حيود الإلكترونات

1. ما الذي كشفته تجربة دافيسن وجيرمر؟
2. كيف لنا أن نفسر تجربة دافيسن وجيرمر؟
3. ما الذي يحصل لو أننا أرسلنا جسيمات كلاسيكية لتمر عبر لوح فيه شقين؟
4. ما الذي يحصل لو أننا أرسلنا إلكترونات لتمر عبر لوح فيه شقين؟

البنية الذرية

5. ما هو الطيف الخطي البراق؟

6. ما هو طيف الإمتصاص؟
7. ما هو تصور ثمسون للذرة؟
8. ما هي تجربة رذرفورد وما الذي أراد أن يتحقق منه؟ ما الذي نتوقعه إذا كان نموذج ثمسون صحيحاً؟
9. ماذا كانت نتيجة تجربة رذرفورد؟
10. كيف فسر رذرفورد نتائج تجربته؟ ما المشكلة الأساسية الذي واجهت تصوره للذرة؟
11. كيف حل نيلز بور مشكلة ذرة رذرفورد؟
12. ماذا كان المعيار الأساسي الذي أنجح نموذج بور للذرة؟
13. هل يتفق، بالتقريب، قطر الذرة الذي وجده بور مع ذلك الذي قدّره الكيميائيون؟
14. ماذا تعني شدة الخطوط الطيفية وهل يمكن إعتبار الشدة معيارا لعدد الذرات في وحدة الحجم؟
15. ما أهمية خط H_α في الفيزياء الفلكية؟
16. ما هي ثغرات ونواقص نموذج بور للذرة؟
17. كيف يمكن فهم فرضية بور لتكميم الزخم الزاوي بضوء فرضية دي بروي؟

مسائل الفصل الأول

س1) إستخدم قانون بلانك وإثبت أن كثافة الطاقة العظمى تحصل عند $\lambda_{\max} = \dfrac{b}{T}$ حيث أن T هي درجة الحرارة و b مقدار ثابت.

س2) لديك مصدرين للأشعة فوق البنفسجية أحدهما بطول موجي80 نانومتر والآخر بطول موجي 110 نانومتر. فإذا سقط هذان الشعاعان على لوح رصاص انبعثت إلكترونات

ضوئية بطاقات قدرها 11.390 و 7.154 إلكترون فولط على التوالي. إحسب قيمة ثابت بلانك، (ب) إحسب دالة الشغل وتردد العتبة للرصاص.

س3) قارن بين الطول الموجي لموجة دي بروي لبروتون طاقته الحركية 70 مليون إلكترون فولط والطول الموجي لإطلاقة كتلتها 100 غرام تتحرك بسرعة 900 م/ثا.

س4) إحسب الطول الموجي المنبعث من انتقال الإلكترون من المستوى الثالث إلى المستوى الثاني في ذرة التريتيوم التي تحوي نواتها على بروتون واحد ونيوترونين وقارن ذلك مع خط الهيدروجين.

س5) البوزيترونيوم هو ذرة شبيهة بالهيدروجين تتألف من إلكترون وبوزيترون لكنها قصيرة العمر، إحسب

(أ) طاقة الذرة وقطرها. (ب) الطاقة والتردد اللازمين لتأيين هذه الذرة إذا كانت في مستوى طاقتها الأول.

س6) خذ ايون الكربون الخامس C^{5+} كذرة شبيهة بالهيدروجين. إحسب

قطر وطاقة هذه الذرة لأي مستوى n ثم قارنها مع الهيدروجين.

طاقة تأين C^{5+} عندما تكون في الحالة المثارة الأولى ثم قارنها مع الهيدروجين.

الطول الموجي المنبعث عند انتقال الإلكترون من المستوى الثالث إلى المستوى الأول وقارن ذلك مع الهيدروجين.

س7) (أ) إثبت أن كثافة الطاقة العظمى تقع عند طول موجي معين يخضع للعلاقة $\lambda_{max} = b/T$ حيث أن b هو ثابت.

(ب) استعمل العلاقة في (أ) لحساب درجة حرارة نجم يبعث كثافة الطاقة العظمى عند طول موجي $\lambda_{max} = 446$ nm. ماهي شدة الإشعاع المنبعثة من النجم؟ (ج) إحسب الطول الموجي وشدة الطاقة المنبعثة من فتيلة تنكستن حرارتها 3300 كلفن.

س8) إثبت أن الطاقة الحركية العظمى المنقولة إلى بروتون يصطدم به فوتون ذي طاقة $h\nu$ هي $K_p = h\nu/[1+m_pc^2/(2h\nu)]$

س9) فوتون يتشتت عن إلكترون ساكن بزاوية قدرها 60 درجة ويصبح طوله الموجي ثلاثة أضعاف طوله الموجي الأصلي. إحسب: (أ) الطول الموجي الأصلي للفوتون، (ب) الطاقة الحركية للإلكترون المتشتت. (ج) زاوية تشتت الإلكترون.

س10) إن الإلكترون الذي يدور في مدار دائري نصف قطره r يتعرض إلى تسارع مركزي مقداره $a = \mathrm{v}^2/r$ ووفقا للنظرية الكهرمغناطيسية فإن الإلكترون ينبغي أن يشع طاقته بمعدل تحدده صيغة لارمور Larmour وهي

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2}{3c^3}\frac{e^2a^2}{4\pi\varepsilon_0}$$

إحسب الزمن اللازم لسقوط الإلكترون من المستوى الأول على البروتون في ذرة الهيدروجين إذا كان سيفقد طاقته الكلية بهذه الطريقة.

ملاحظة: إحسب الطاقة الكلية (الحركية + الوضع) ثم خذ تفاضلها مع الزمن وإجعل الناتج مساوياً لمعدل فقدان الطاقة الوارد أعلاه ثم إحسب الزمن الكلي المستغرق لكي يصبح نصف القطر صفراً.

س11) برهن أن فرضية بور لتكميم الزخم الزاوي تعني أن يتألف مدار الإلكترون الدائي من عدد صحيح من ثابت بلانك مقسوماً على الزخم الخطي للإلكترون.

س12) إحسب الطول الموجي الأقصر والطول الأكبر في سلسلة باشن. ما هو النطاق اللوني الذي تقع فيه هذه السلسلة؟

الفصل الثاني

فرضية دي بروي وأساسيات الميكانيك الموجي

كشفت الظواهر التي عرضنا لها في الفصل الأول من هذا الكتاب أن للجسيمات في العالم المجهري Microscopic تصرفاً موجياً وأن للأمواج (والقصيرة منها على وجه الخصوص) تصرفاً جسيمياً. وهذه الطبيعة الثنائية قد أدت الى التساؤل عن القوانين الجديدة التي تحكم مثل هذه التصرفات. في هذا الفصل سنقدم بياناً لتفسير الصفات الموجية للجسيمات والصفات الجسيمية للأمواج في توطئة للتمثيل الموجي للجسيمات بما يسمى رزمة الأمواج Wavepacket ثم تقديم ما ينطوي عليه هذا التمثيل من التضحية بالدقة الكلاسيكية في القياس فنقدم ما يتضمنه مبدأ اللادقة لهيزنبرغ والذي هو أول أركان ميكانيك الكموم. وهذا كله إنما يمهد للصياغة المعادلة الرئيسية في هذا العلم وهي معادلة الفيزيائي إروين شرودنجر التي هي الأخرى ركن من أركان ميكانيك الكموم اللانسبوي والتي ستكون موضوع الفصل اللاحق.

فرضية دي بروي

أدت نتائج التجارب الكثيرة التي ذكرنا جانبا منها الى الشعور لدى الفيزيائين أن الجسيمات في العالم المجهري Microscopic تتصرف كأمواج وأن الأمواج تتمتع بصفات جسيمية. هكذا إنطلقت فكرة ثنائية الموجة والجسيمWave-Particle Duality في العالم المجهري. لكن كيف السبيل الى وضع تصور رياضي لمثل هذه الفكرة بحيث يكون التصور قابلا للتداول حسابياً وبما يوفر نتائج حسابية تطابق الواقع التجريبي؟

كان الفرنسي دي بروي de Broglie الفرنسي قد وضع عام 1924 علاقة حسابية بسيطة تربط الصفة الموجية بالصفة الجسيمية وهذه العلاقة هي

$$\lambda = \frac{h}{p} \qquad (2.1)$$

حيث أن λ هي الطول الموجي وp هي زخم الجسيم. هذه العلاقة لا تعبر عن جسيم ولا عن موجة بل عن كينونة ثنائية لها وجه جسيمي وآخر موجي. ويمكن فهم هذه العلاقة على أنها علاقة تكافؤ بين الوجه الجسيمي وهو زخم الجسيم والوجه الموجي وهو الطول الموجي. بمعنى أننا إذا تصورنا الإلكترون الذي زخمه p موجة فإن طول تلك الموجة هو λ.

إذا وظفنا نظرية النسبية الخاصة وعلاقة بلانك لطاقة الفوتون فإن العلاقة (2.1) تنطبق على الجسيمات عديمة الكتلة كالفوتونات لكن دي بروي كان جريئاً جداً (أو مجنوناً!) عندما إدعى أن العلاقة تنطبق أيضاً على الجسيمات ذوات الكتلة كما تنطبق على الفوتونات. ولكن إذا كان للجسيم تصوير موجي فأي موجة نقصد؟ هل هي موجة كهرمغناطيسية؟ أم موجة ميكانيكية أم ماذا؟

لم يكن واضحا لدى الفيزيائيين أول الأمر نوع الموجة التي يمثلها الجسيم لكن طالما أن الجسيمات هي جزء من تكوين المادة على الأقل، فإن هذه الموجات لابد أن تتصل بالمادة فسميت **موجات مادية** Matter Waves. إنما في حالة كموم الضوء (الفوتونات) فإن هذه الأمواج هي أمواج كهرمغناطيسية. سنرى لاحقاً أن أمواج دي بروي في الحقيقة هي أمواج الإحتمالية حيث أن كثافتها هي معيار لمكان وجود الجسيم .

تفسير تكميم الزخم الزاوي في نموذج بور الذري

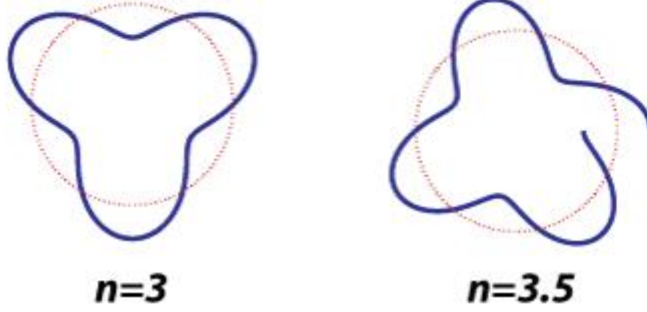
يمكننا توظيف علاقة دي بروي لتفسير تكميم الزخم الزاوي في ذرة الهيدروجين بحسب نموذج بور. فالإلكترون الذي يدور في مدار دائري نصف قطره r إنما يقطع في كل دورة محيطاً كاملاً، أي مسافة مقدارها $2\pi r$. وبموجب مبدا تكميم الزخم الزاوي فإن

$$mvr = n\frac{h}{2\pi}$$

وباستخدام علاقة دي بروي فإن هذا يعني أن

$$2\pi r = n\frac{h}{p} = n\lambda$$

ومضمون هذا أن محيط مدار الإلكترون ينبغي أن يكون عدداً صحيحاً من الأمواج الكاملة.



الشكل (2–1) موجة دي بروي ومدار الإلكترون

ولكن ماذا يحصل لو لم يكن هنالك أمواج كاملة؟

الجواب: إن المدار سيتآكل بسبب تداخل الموجة مع نفسها وخلال عدد قليل من الدورات يمكن أن يتآكل المدار كله ويتلاشى. فمثلاً إذا كان $2\pi r = 1.1\lambda$ فإن هذا المدار سوف يتلاشى بعد خمس دورات للإلكترون حول النواة. هذا هو السر الذي تنطوي عليه فرضية تكميم الزخم الزاوي في ذرة بور.

رزمة الأمواج Wave Packet

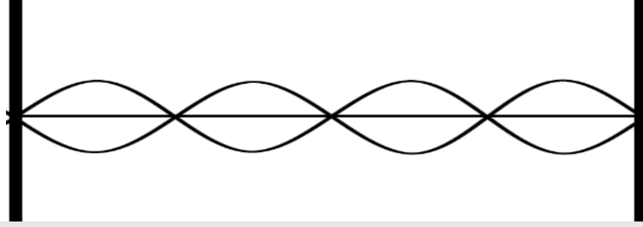
كيف يمكننا صياغة كينونة جديدة تجمع بين صفات الموجة والجسيم؟

نعلم أن أهم صفتين للجسيم هما التحيُّز Locality والثبات Stability. ونعلم أن أهم صفتين للموجة هما الإمتداد Extension والتغير Change، فالموجة لا تثبت على حال وكل نقطة على صفحة الموجة هي في حال تغير واختلاف عن ما حولها. ونظرا لأن تحييز الجسيم هو الأهم من صفاته ونظرا لأننا نعلم أن أشياء العالم هي في حال تغير دائم حتى

لو كنا لا نلاحظه، فقد ذهب الفيزيائيون الى التمسك بالتحييز كصفة للكينونة الجديدة.

وهنا برز السؤال: كيف يمكننا "**تحييز**" الموجة؟

ربما يكون الجواب البديهي أن نحصرها بين حاجزين. نعم بالفعل فعندئذ ننشئ ما يسمى الموجة الواقفة Standing Wave. وكما في الشكل



الشكل (2–2) الموجة الواقفة

هذه الموجة الواقفة مؤلفة من بطون وعقد Nodes وذلك لأنها موجة متداخلة مع نفسها. وهاهنا في الشكل إحتوت المسافة بين الحاجزين موجتين كاملتين فصار لدينا اربع بطون.

إذن فإن بالإمكان تحييز الموجة إذا ما جمعناها وجعلناها تتداخل مع بعضها. ولهذا الغرض دعنا نختار أولاً موجتين بينها فرق صغير في التردد مقداره $\Delta\omega$ وفي العدد الموجي Δk

$$y_1(t) = A\cos(kx - \omega t)$$

$$y_2(t) = A\cos[(k + \Delta k)x - (\omega + \Delta\omega)t]$$

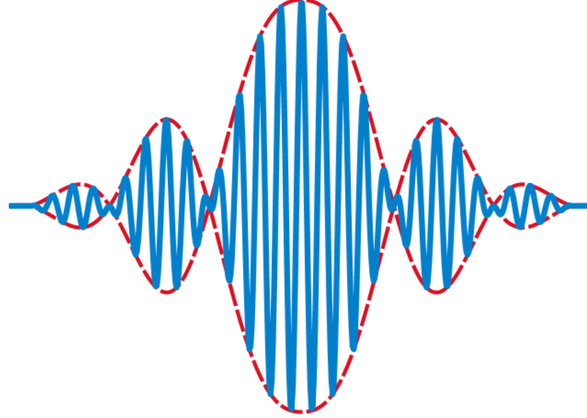
ولنجمع هاتين الموجتين. ماذا نحصل؟ سنجد أننا باستخدام العلاقة المثلثية

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta) \qquad (2.2a)$$

نحصل على

$$y = y_1 + y_2 = 2A\cos\frac{1}{2}[(2k + \Delta k)x - (2\omega + \Delta\omega)t]\cos(\frac{\Delta kx}{2} - \frac{\Delta\omega t}{2}) \qquad (2.2b)$$

ولو رسمنا هذه النتيجة لوجدنا أنها تعبر عن موجتين متداخلتين فيما بينهما تولدان نمطين من الأمواج الأول هو موجة الطور Phase Wave ذات التردد العالي والطول الموجي القصير والثاني موجة الزمرة Group Wave وهي الموجة الشاملة التي تغلف أمواج الطور.



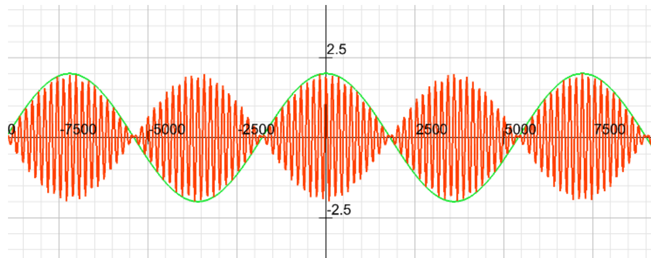
الشكل (2-3) رزمة الموجة

مثال جمع الأطوار الموجية وتحصيل موجة زمرة

إجمع الشكلين الموجيين $y_1(x) = \cos(2x)$ و $y_2(x) = \cos(2.1x)$

الجواب: باستخدام العلاقة (2.2a) نحصل على $y(x) = 2\cos(0.05x)\cos(2.05x)$

وعند رسم هذه الدالة فإنها تعطينا الشكل الموجي التالي



جمع الأطوار الموجية لتحصيل موجة الزمرة

حيث تكون موجة الزمرة هي الإطار الخارجي الذي يجمع تحته أمواج الطور. وبالمناسبة يمكن أن يمثل هذا قطار من الفوتونات مثلاً.

متسلسلة وتحويلات فورييه Fourier Series and Transformations

إن مسألة تحييز الموجة متصلة بوجه أو بآخر بتحليلات فوريه وتحويلاته وهنا نقدم عرضا موجزاً لهذه المسألة.

تفترض تحليلات فورييه أن أي دالة دورية تكون قابلة للتحليل بدلالة الدوال المثلثية. لذلك فإن متسلسلة فورييه هي عملية نشر الدالة على أسس دوال مثلثية جيبية وجيب تمامية sine and cosine وهذه دوال متعامدة على بعضها البعض. فإذا كان لدينا دالة دورية (متكررة) $\psi(x)$ خلال الفترة $-\frac{L}{2} \le x \le \frac{L}{2}$ فإن متسلسلة فورييه تتخذ الشكل التالي

$$\psi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty}\left[a_n \cos\frac{2n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{2\pi nx}{L}\right] \tag{2.3}$$

ولإيجاد المعاملات a_n و b_n نستخدم علاقات التعامد

$$\frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} \cos\frac{2m\pi x}{L} \sin\frac{2n\pi x}{L} dx = 0$$

كذلك

$$\frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} \cos\frac{2m\pi x}{L} \cos\frac{2n\pi x}{L} dx = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} \sin\frac{2m\pi x}{L} \sin\frac{2n\pi x}{L} dx = \delta_{mn}$$

وهكذا نجد أن

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} \psi(x) dx \tag{2.4}$$

ونجد أن

$$a_n = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2}\psi(x)\cos\frac{2m\pi x}{L}\,dx \qquad (2.5)$$

كذلك نجد أن

$$b_n = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2}\psi(x)\sin\frac{2n\pi x}{L}\,dx \qquad (2.6)$$

وباستخدام العلاقة

$$e^{i(2n\pi x/L)} = \cos\frac{2n\pi x}{L} + i\sin\frac{2n\pi x}{L} \qquad (2.7)$$

بالإمكان كتابة المتسلسلة في (2.3) بالشكل التالي

$$\psi(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left[(a_n - ib_n)e^{2i\pi nx/L} + (a_n + ib_n)e^{-2i\pi nx/L}\right] \qquad (2.8)$$

والآن إذا عرفنا المعامل c_n كما يلي

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2}\left(a_n - ib_n\right) \qquad n>0 \\ &= \frac{1}{2}a_0 \qquad n=0 \\ &= \frac{1}{2}\left(a_{-n} + ib_{-n}\right) \qquad n<0 \end{aligned} \qquad (2.9)$$

فإن بالإمكان كتابة متسلسلة فورييه بالشكل التالي

$$\psi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2in\pi x/L} \qquad (2.10)$$

حيث أن

$$c_n = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2}\psi(x)e^{2in\pi x/L}dx \qquad (2.11)$$

لاحظ أن $\psi(x)e^{2in\pi x/L}$ هي دالة موجية سعتها تعتمد على x وهنا نحن نجمع عدداً من الدوال خلال المدى المكاني $-\frac{L}{2} \le x \le \frac{L}{2}$ لو أننا جمعنا عددا كبيرا من الأمواج لوجدنا أن التحيز يصير أفضل. ولو أننا جمعنا عددا لانهائيا من الأمواج التي لها تردد زاوي ω وسعة قدرها $\phi(k)$ وتختلف في العدد الموجي بمقدار dk عن بعضها فإننا يجب أن نأخذ التكامل على المتغير k ليكون لدينا

$$\begin{aligned}\psi(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(k)e^{i(kx-\omega t)}dk \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-i\omega t}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(k)e^{ikx}dk\end{aligned} \tag{2.12}$$

لاحظ أن الزمن هنا يلعب دور معامل الطور ليس إلا لكونه متغير مستقل. لذلك يمكن أن نتعامل معه عند $t=0$ ونحصل على

$$\psi(x,0) = \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(k)e^{ikx}dk \tag{2.13}$$

حيث أن $\phi(k)$ هي السعة وهي ما يسمى تحويل فورييه للدالة $\psi(x)$ وصيغتها هي

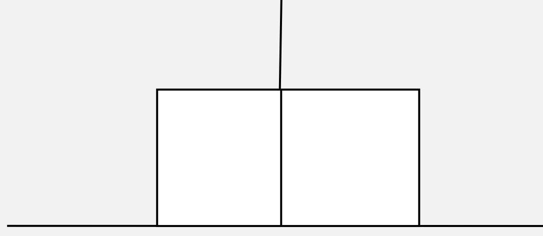
$$\phi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)e^{-ikx}dx \tag{2.14}$$

وهذا الشكل يمثل تحييزا للموجة على قدر كبير. لكننا في كل الأحوال نلاحظ أن عرض الموجة Width لا يمكن أن يصير صفراً.

مثال: خذ الدالة التالية في فضاء k واحسب الدالة المقابلة لها $\psi(x)$.

$$\begin{aligned}\phi(k) &= N \qquad -K \le k \le K \\ &= 0 \qquad \text{elsewhere}\end{aligned}$$

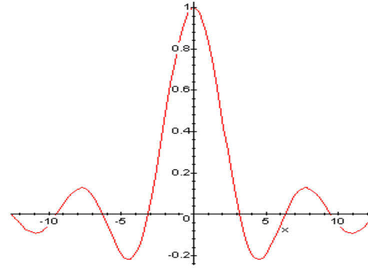
الحل: إن هذه الدالة هي نبضة مربعة. وحيث N ثابت فإن الرسم هو



ويمكن حساب $\psi(x)$ كما يلي

$$\psi(x)=\int_{-K}^{K}dkNe^{ikx}=\frac{N}{ix}\left(e^{iKx}-e^{-iKx}\right)=2N\frac{\sin Kx}{x}$$

ورسم هذه الدالة كما يلي



ويتضح كيف أن الدالة المربعة في فضاء k تتحول الى دالة مثلثية في فضاء x.

يتحقق مضمون العلاقة بين فضاء الزخم وفضاء الإحداثيات في حالة حيود الجسيمات حيث يكون الجسيم متحيزاً بقدر من الدقة لكنه يتصرف كجسيم. وحين نقذف هذا الجسيم على ثقب فإنه يتصرف كموجة تتداخل مع نفسها وهذا ما يجعل الجسيمات تُظهر أنماط الحيود الذي يسمى حيود فراهوفر. التصرف الجسيمي هو ما نعبر عنه بامتلاك

الجسيم للزخم والتصرف الموجي هو ما نعبر عنه في عملية التداخل. كلا الحالين يعبر عن كينونة واحدة هي الكينونة الثنوية Dualism.

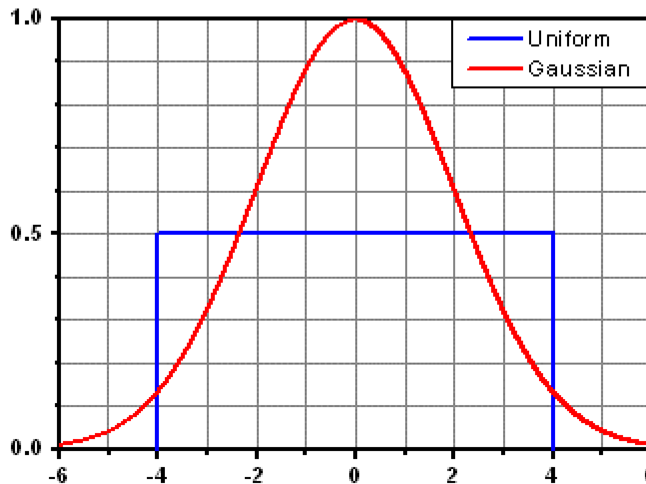
فضاء الإحداثيات وفضاء الزخم

إن الدالة $\psi(x)$ تصف الموجة في فضاء الإحداثيات Coordinate Space أو ما يسمى x-space إذ تعتمد على الإحداثيات، لكن الدالة $\phi(k)$ هي التي تصف الموجة في فضاء الزخم Momentum Space أو فضاء الطور حيث يسمى k-space والرابط بينهما الذي يحول إحداهما إلى الأخرى هو تحويلات فورييه كما في العلاقتين (2.13) و(2.14). وفي كلا الفضائين تظهر دالة الموجة كتوزيع غاوسي له إتساع (عرض) يتعين مقداره عندما يكون أس الدالة مساوياً −1.

ولتوضيح هذه المسألة المهمة في ميكانيك الأمواج دعنا نأخذ

$$\phi(k) = e^{-\alpha(k-k_0)^2 /2} \qquad (2.15)$$

وهذا هو منحنى غاوسي Gaussian Curve يتمركز حول $k = k_0$ ويمثل α معامل يتعلق بعرض المنحنى، فكلما زادت قيمتها ضاق عرض المنحنى كما مبين في الشكل أدناه.



الشكل (2–4) التوزيع الغاوسي

وهاهنا خاصية مهمة تربط بين إتساع الزمرة الموجية في فضاء الزخم وإتساعها في فضاء الإحداثيات وتلك هي أن $\Delta x \Delta k = O(1)$ ، وهذا مما يجعل تمثيل الجسيم بزمرة أمواج مقيداً بشرط أن يكون إتساع الزمرة أكبر من الصفر في أي حال من الأحوال وهذا مما يعني أن الجسيم الكمومي لا يمكن أن يتحيز في نقطة هندسية. ولا يمكن أن يكون ساكناً سكوناً مطلقاً.

أرجو أن تتذكر أن العلاقة بين k والزخم p هي $p = \hbar k$. وبدلالة p تكون علاقة فورييه هي

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(p) e^{ipx/\hbar} dp$$

والعلاقة العكسية هي

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) e^{-ipx/\hbar} dx$$

مثال لتحويل الدالة من فضاء الإحداثيات إلى فضاء الزخم:

لو أخذنا الدالة في (2.15) فسيكون لدينا عرض هذه الدالة الغاوسية في فضاء k هو

$$\alpha (k - k_0)^2 / 2 = 1$$

أي أن $\Delta k = \sqrt{\frac{2}{\alpha}}$.

والآن لو أننا حولنا $\phi(k)$ الى $\psi(x)$ عبر تحويلات فورييه لوجدنا أن

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha (k-k_0)/2} e^{ikx} dk$$

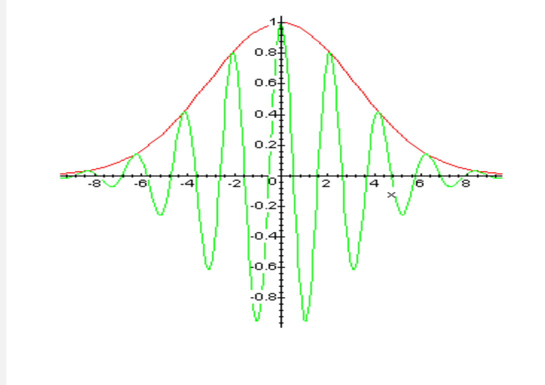
والآن لدينا

$$-\frac{\alpha}{2}(k-k_0)^2+ikx=-\left[\frac{\sqrt{2\alpha}(k-k_0)}{2}-\frac{ix}{\sqrt{2\alpha}}\right]^2-\frac{x^2}{2\alpha}+ik_0x$$

وهذا يعني أن $y=\left[\frac{\sqrt{2\alpha}(k-k_0)}{2}-\frac{ix}{\sqrt{2\alpha}}\right]$ لذا فإن

$$\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ik_0x}e^{-x^2/2\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{\alpha}}e^{-y^2}dy$$
$$=\sqrt{\frac{1}{\alpha}}e^{ik_0x}e^{-x^2/2\alpha}$$

وهذه الصيغة تمثل موجة طورية دورية e^{ik_0x} متمركزة حول $x=0$ مغلفة بموجة زمرة غاوسية هي $e^{-x^2/2}$. وهكذا نرى من خلال هذا المثال أن بالإمكان تمثيل الجسيم كزمرة من الأمواج بتوزيع غاوسي. وكما في الشكل التالي



لاحظ أن $\Delta x=2x=2\sqrt{2\alpha}$. والآن يكون $\Delta x\Delta k=2\sqrt{2\alpha}.\sqrt{2/\alpha}=4$

وهي قيمة من القدر واحد of order one. (القدر واحد يعني من 1 إلى 9)

تمثيل الجسيم الحر

إن التمثيل الموجي الأفضل لجسيم حر يتحرك في بعد واحد يمكن أن يتخذ الصيغة التالية

$$\psi(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)} \qquad (2.16)$$

هذه الصيغة يمكن أن تمثل موجة مفردة ويمكن أن تمثل رزمة أمواج فإن كانت رزمة أمواج أمكن فتحها بدلالة مركباتها التي تؤلفها. وهذه الصيغة هي صيغة الموجة المستوية حيث أن A هي سعة زمرة الموجة والسعة كما نعلم مرتبطة بالشدة Intensity. في هذا التمثيل نستخدم المفردات الموجية مثل ω و k. ولكي يتخذ التمثيل الموجي صيغة تمتزج فيها صفات الجسيمية مع الصفات الموجية فإن من الضروري تضمين فرضية بلانك لتكميم الطاقة وفرضية دي بروي لعلاقة الزخم بطول الموجة. وهذه يمكن أن تتخذ الصيغة التالية.

$$E = h\nu = \hbar\omega, \quad p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k \qquad (2.17)$$

حيث أن $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.054 \times 10^{-34}\,\text{J.sec}$. بالتالي يمكننا أن نكتب صيغة التمثيل الموجي لجسيم حر يتحرك في بعد واحد كما يلي

$$\psi(x,t) = Ae^{i(px-Et)/\hbar} \qquad (2.18)$$

وهكذا نحصل على صيغة تمتزج فيها الصفات الموجية (التغير والإمتداد) مع الصفات الجسيمية (الزخم).

إن الصيغة الواردة في (2.18) تعبر في إطار ميكانيك الكموم عن دالة موجة، ويمكن أن تمثل جسيما واحداً أو مجموعة جسيمات متماثلة تماماً، حيث تمثل $|A|^2$ عندئذ فيض Flux هذه الجسيمات. أما في حالة كون النظام مؤلفا من جسيم واحد فإن $|A|^2$ تمثل كثافة إحتمالية إيجاد الجسيم على تلك الحالة، ويمثل p زخمه وE طاقته الميكانيكية الكلية. وهذه الصيغة هي تعبير تختلط فيه الصفات الموجية مع الصفات الجسيمية كما هو واضح ويرمز فيها ثابت بلانك إلى حقيقة أن هذه الصيغة قد تضمنت فكرة بلانك لتكميم الطاقة فضلا عن أنها تضمنت في باطنها صيغة دي بروي للتعبير عن ثنائية الموجة والجسيم وبالتالي فإن هذه الصيغة تعبير مناسب للجسيمات الكتلوية والأمواج على السواء.

سرعة الزمرة وسرعة الطور

لكل موجة أياً كان نوعها سرعة، والعلاقة بين سرعة الموجة وترددها الزاوي هو $v_p = \frac{\omega}{k}$ وفي حالة تكوين رزمة موجية فإننا إنما نؤلفها من مجموعة كبيرة من هذه الأمواج (كل منها تسمى موجة طور Phase Wave) التي تختلف في تردداتها والعدد الموجي قليلاً عن بعضها. أي هي مجموعة أو زمرة من الأطوار Phases وستكون لها سرعة ربما تختلف عن سرعة الطور وهي $v_g = \frac{d\omega}{dk}$. وتختلف العلاقة بين سرعة الزمرة وسرعة الطور حسب نوع الوسط الذي تنتقل فيه الموجة. والآن لو أننا مثّلنا الجسيم الحر برزمة من الأمواج وباستخدام العلاقات $E = \hbar\omega, \quad p = \hbar k$ فإننا نجد أن

$$v_g = \frac{dE(p)}{dp}, \quad v_p = \frac{E(p)}{p}$$

ونظراً لأن $E = p^2 / 2m$ فإننا نحصل على

$$v_g = \frac{p}{m} = v_{particle}\,, \quad v_p = \frac{p}{2m} = \frac{1}{2} v_g$$

تمثيل موجة الزمرة وموجة الطور

ورد في خاطري وأنا أقوم برياضة المشي صباحاً أن حركة الزمرة وحركة الطور يمكن تشبيههما بحركة الانسان أثناء المشي الحر. فهو يحرك رجليه الواحدة تلو الأخرى ويديه تباعاً بحركة توافقية بسيطة. يمد رجله خطوة ثم يندفع بذات الوقت الذي يمد فيه الخطوة الثانية والحركة لا تتحقق فعلاً إلا بعد أن يمد الخطوتين. فحركة الشخص هي حركة الزمرة وحركة يديه هي حركة الطور. ولو نظرنا من خلال مرجعية الشخص المتحرك نفسه لوجدنا أن االيدين تتحركان جيئة وذهابا في حركة توافقية بسيطة فيما تتحرك الأرض تحتهما بمعدل ثابت. فهاهنا كأن أمواج الطور الممثلة بحركة الأيدي هي في حالة سكونية Stationary أو كأنها تمثل في ترددها بهذه الحركة موجة واقفة وهنا ينبغي أن نلاحظ أن إحدى يدي الشخص

تبدو راجعة إلى الوراء فيما يتقدم الشخص إلى الأمام، على حين أن الأرض تتحرك تحته إلى الوراء (وهذا مكافئ للقول أن الجسم يتحرك بالنسبة للأرض إلى الأمام). وحتى إذا ما أردنا سبر هذه المماثلة أكثر فإننا نجد أن العدد الموجي سيمثل بالكمية 2π مقسومة على المسافة التي تتحركها اليد ذهابا وايابا (وهي التي تقابل الطول الموجي للطور) فيما يمثل التردد عدد المرات التي تكمل فيها اليد دورة كاملة في وحدة الزمن. ومن الواضح أن سرعة الطور (اليد) هنا هي ضعف سرعة الزمرة ومعدل سرعة الأرجل هي نصف معدل سرعة اليدين.

مثال: إذا كان تردد الأمواج في المياه العميقة يرتبط بطول الموجة كما في العلاقة التالية $\nu = \sqrt{\frac{g}{2\pi\lambda}}$ فما هي سرعة موجة الزمرة وما سرعة موجة الطور؟

الحل: يجب أولا كتابة العلاقة كما يلي

$$\omega = \sqrt{gk}$$

بالتالي فإن سرعة الزمرة هي

$$\mathrm{v}_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}}$$

أما سرعة موجة الطور فهي

$$\mathrm{v}_p = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}}$$

هذا يعني أن سرعة الطور هي ضعف سرعة الموجة.

طول موجة كمبتن للجسيمات

يُعرّف طول موجة كمبتن لجسيم كتلته m بالصيغة التالية

$$\lambda_c = \frac{h}{mc}$$

أي أنه يتناسب عكسيا مع كتلة الجسم فالأجسام القليلة الكتلة تكون موجة كمبتن لها كبيرة والأجسام ذوات الكتل الكبيرة تكون موجة كمبتن لها صغيرة. وتتخذ موجة كمبتن معياراً لقياس أقل إتساع للزمرة الموجية التي يمثلها الجسيم. فالجسيم في أي من أبعاده لا يمكن أن يكون أصغر من موجة كمبتن التي تمثله.

دعنا نحسب طول موجة كمبتن للإلكترون ونقارنها مع تلك التي للبروتون

$$\lambda^e{}_c = \frac{6.626\times10^{-34}}{9.1\times10^{-31}\times3\times10^8} = 2.4\times10^{-12}\,\text{m}$$

أما البروتون فإن طول موجة كمبتن له هي

$$\lambda^p{}_c = \frac{6.626\times10^{-34}}{1.67\times10^{-27}\times3\times10^8} = 1.32\times10^{-15}\,\text{m}$$

ولعلنا نفهم من هذا لماذا لايمكن أن تحتوي نواة الذرة التي قطرها من رتبة 10^{-15} متر على إلكترونات.

مبدأ اللادقة لهايزنبرغ Heisenberg Uncertainty Principle

إن التمثيل الموجي للجسيم بدلالة الزمرة الموجية يجعل لهذه الزمرة إتساعا محدوداً بالضرورة. وهذا الإتساع المكاني Δx في فضاء الإحداثيات هو تعبير عن قدر من اللادقة أو اللايقين في الموضع الذي تتموضع به زمرة الأمواج. وهذه اللادقة لا يمكن أن تكون صفرا. بالتالي لابد من حد أدنى لـ(اللايقين) Uncertainty في تحديد موضع الجسيم. من جانب آخر فإن إتساع زمرة الموجة مكانيا مرتبط باتساع مقابل للعدد الموجي k أي أنه مقابل كل Δx يوجد Δk ومضروب هذه اللادقة ببعضها يكون من رتبة الوحدة Order of Unity. ويمكن إثبات أن

$$\Delta x \Delta k \geq \frac{1}{2} \qquad (2.19)$$

وبموجب هذا وبدلالة الزخم الخطي حسب العلاقة (2.17) نحصل على

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \qquad (2.20)$$

وهذه العلاقة تقرر أنه لا يمكن تحديد موضع جسيم وزخمه بدقة لامتناهية وفي آن واحد. ويمكن إثبات علاقة مماثلة بين الطاقة الكلية للجسم والزمن وهذه هي

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \qquad (2.21)$$

وهذا هو مبدأ اللادقة لهيزنبرغ The Heisenberg Uncertainty Principle. هذا المبدأ يعني أن هنالك بعض المتغيرات الفيزيائية المتكاملة التي لا يمكن قياسها مع بعضها بدقة لامتناهية في آن واحد. ومن هذه المتغيرات المتكاملة: الموقع والزخم الخطي والطاقة والزمن. وسنجد فيما بعد أن لمبدأ اللادقة هذا جذورا في العلائق البنيوية لميكانيك الكموم بل هو جزء أساسي من البنية الكمومية للكون كله. إن لمبدأ اللادقة إرتباطا وثيقا بالطبيعة الثنائية (الموجية ـ الجسيمية) للأشياء هذ الطبيعة التي تتمظهر بوضوح في بنية العالم الذري وتحت الذري وعموما العالم المجهري. وليس يقتصر تطبيق هذا المبدأ على العالم المجهري بل كما قلنا إنما يظهر تأثيره واضحا هنالك.

مضامين مبدأ اللادقة

إن لمبدأ اللادقة مضامين مهمة بعضها حسابي والآخر مفاهيمي وفلسفي وأهم هذه المضامين ما يلي

لا يمكن أن يكون في العالم جسيم ساكن سكوناً تاماً لأن ذلك يعني ان زخمه يكون صفراً وبالتالي وفقا لمبدأ اللادقة يكون موضعه غير محدد تماماً.

كلما زادت الدقة العظمى لتحديد موقع الجسيم كلما قلت دقة تحديد زخم الجسيم والعكس صحيح.

كلما زادت دقة تحديد طاقة جسيم كلما قلت دقة تحديد زمن وجوده والعكس صحيح. يمكن أن نتخيل وجود جسيمات مجازية (إفتراضية) ذات طاقة مقدارها E شرط أن تتواجد هذه الجسيمات لمدة زمنية لا تتجاوز $t < \frac{\hbar}{2E}$ وقد تم استخدام مثل هذه الجسيمات المجازية لتفسيرالقوى النووية.

إن مبدأ اللادقة ينفي، ضمنياً، حتمية تنبؤات الفيزياء الكلاسيكية وبالتالي ينفي حتمية لابلاس التي تقرر أن توفر الشروط الطبيعية لأية ظاهرة يحتم وقوعها. ولما كنت الشروط الابتدائية التي تشمل الموضع والسرعة لايمكن تحديدها بدقة لامتناهية أصبح القول بحتمية وقوع التنبؤ الفيزيائي الكلاسيكي أمر غير صحيح علمياً.

أهمية قيمة ثابت بلانك

من الملاحظ أن ثابت بلانك يلعب دورا مهما في مبدأ اللادقة. فإن قيمة هذا الثابت الصغيرة جدا (6.656×10^{-34} J.s) تجعل من تأثيرات مبدأ اللادقة في العالم الجهري صغيرة جداً ولا تُغير شيئاً من بنية ومظاهر هذا العالم الكلاسيكية. لذلك لا نشعر في حياتنا اليومية بأي دور لمبدأ اللادقة. أما لو كانت قيمة ثابت بلانك أكبر كثيراً مما هي عليه الآن لظهرت تأثيرات مبدأ اللادقة في حياتنا اليومية ولرأينا السيارات في الشارع تسير باتجاهات متعاكسة أحيانا بل سنراها تنط فجأة من مسرب الى آخر. وربما تداخلت مع بعضها البعض، ولما أمكننا تحديد مواقعها بقدر مضبوط. أما لو كانت قيمة ثابت بلانك أصغر كثيراً مما هي عليه الآن بمراتب كثيرة فإن تأثيرات مبدأ اللادقة في العالم المجهري سوف تتضائل وتختفي حتى أن العالم المجهري سيظهر وكأنه يتصرف كلاسيكياً وليس للمظاهر الموجية فيه أي أثر.

لقد طرحت مرة السؤال: كيف سنتصرف مع قياساتنا في عالم تكون فيه إشارة القياس الناقلة هي الصوت المسموع فقط؟ بمعنى أن نفترض ان العالم مؤلف من مشاهدين عميان لا وسيلة لهم في تقدير الأبعاد والمسافات إلا الصوت المسموع. فكيف سيكون الأمر بالنسبة لمبدأ اللادقة؟

إن مقدار اللادقة في القياس تكون عادة من رتبة طول الموجة المستخدمة في القياس. ولما كانت الأطوال الموجية في الصوت المسموع تتراوح ما بين 17 مليمترا وحتى 17 مترا، وهذا هو مدى مقدار اللادقة في تحديد مواقع الأشياء، فإننا بالتالي لن نتمكن من أن نعرف أي شئ عن البكتيريا مثلاً ولا عن تكوين الخلايا وربما سنحتاج الى تطوير وسائل أخرى نتمكن بها من اختراق العوالم الصغيرة. سيكون العالم المقتصر على السمع فقط بالتأكيد عالما متخلفاً مقارنة بعالمنا. فالحمد لمن أعطانا السمع والبصر.

ويستفاد من مبدأ اللادقة في تقدير حسابات الزخوم والطاقات للنظم الفيزيائية الكمومية. والمثال التالي يوضح كيف أننا باستخدام مبدأ اللادقة نتمكن من تقدير بعض الأمور المهمة دون إثباتها بالضرورة على نحو رصين وقطعي.

مثال حول استخدام مبدأ اللايقين: قبل اكتشاف النيوترون عام 1932 أراد الفيزيائيون تفسير الفرق بين كتلة نواة الذرة وعدد البروتونات فيها كما يظهر من شحنتها حيث كانت التجارب تُظهر لهم أن كتلة النواة أكبر من مجموع كتل الشحنات الموجبة (البروتونات) التي فيها، فافترضوا وجود إلكترونات داخل نواة الذرة تتعادل شحناتها مع ما يساوي عددها من البروتونات. لكن مبدأ اللادقة أظهر لهم أن الإلكترونات لايمكن أن توجد في نواة الذرة. ما هو الحد الأدنى للطاقة الحركية للإلكترون إذا ما وجد في نواة ذرة قطرها 10^{-14} متر.

الجواب:

$$\Delta p = \frac{\hbar}{2\Delta x} = \frac{1.054\times10^{-34}}{2\times10^{-14}} \approx 5\times10^{-21}\text{kg}.m/s$$

يمكن القول أن الحد الأدنى لعدم الدقة يحصل إذا ما أخذنا $\Delta p \sim p$ في هذه الحالة يجب حساب الطاقة الكلية بموجب العلاقة النسبوية

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} \approx pc = 1.5\times10^{-12}\,J = 9.37\,\text{MeV}$$

ولما كان الإلكترون لا يتوافر على هذا القدر من الطاقة في أي من أحواله داخل الذرة فقد عَرف الفيزيائيون أن الإلكترون لا يمكن أن يتواجد داخل نواة الذرة.

مناقشة: ناقش الموضوع من زاوية أخرى. إحسب طول موجة دي بروي للإلكترون الذي زخمه 5×10^{-21} كغم.متر/ثا . هل يمكن لنواة الذرة المذكورة أن تحوي مثل هذا الإلكترون؟ لماذا؟

حركة الرزمة الموجية Motion of Wavepacket

سبق وأن بينا أن رزمة الأمواج هي عبارة عن جملة من الأمواج البسيطة المتداخلة مع بعضها. والسؤال الذي يظهر هو كيف تتحرك هذه الجملة الموجية؟ والإجابة على ذلك أن حركة الجملة تعتمد على حركة الأمواج المؤلفة لها. إن طور الجملة المستوية هو

$$e^{i(kx-\omega t)}$$

وإذا ما كنا نتعامل مع حركة أمواج الضوء في الفراغ فإن العلاقة بين التردد الزاوي ω والعدد الموجي k حين يكون الوسط الناقل خطياً بدون تبدد Dispersion هي $\omega = kc$. وهذه تمكننا من كتابة الصيغة أعلاه

$$e^{ik(x-ct)}$$

وإذا ما جعلنا هذه الأطوار تتداخل مع السعة $g(k)$ فإننا نحصل على

$$f(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty} g(k)e^{ik(x-ct)}dk = f(x-ct) \qquad (2.22)$$

وهكذا يتضح أن هذه الصيغة هي نفس الصيغة التي بدأنا بها فيما عدا أنه بدلا من أن تكون الموجة متمركزة حول $x=0$ فإنها الآن متمركزة الآن حول $x-ct=0$. لذلك فإن أمواج الضوء تنتشر بدون تشويه بسرعة الضوء c.

إلا أن أمواجاً أخرى لا تتمتع بالميزة التي يتمتع بها الضوء وهي $\omega = kc$ على حين أن ω تكون دالة للعدد الموجي k حيث أن

$$f(x,t)=\int g(k)e^{ikx-i\omega(k)t}dk$$

دعنا نعالج رزمة موجية ضيقة متمركزة حول k_0. ولذلك نتمكن من فتح الدالة $\omega(k)$ حول k_0 باستخدام متسلسلة تايلور

$$\omega(k)=\omega(k_0)+(k-k_0)\left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k_0}+\frac{1}{2}(k-k_0)^2\left(\frac{d^2\omega}{dk^2}\right)_{k_0}$$

إن الحد الأول ثابت وهو غير معتمد على k والحد الثاني متناسب مع سرعة الزمرة Group Velocity التي هي سرعة زمرة الأمواج، حيث أن

$$\left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k_0} = \mathrm{v}_g$$

لو فرضنا أن

$$\left(\frac{d^2\omega}{dk^2}\right)_{k_0} = \beta$$

ولو أخذنا $g(k)=e^{-\alpha k'^2}$ حيث أن $k' = k-k_0$ فإن زمرة الأمواج تتخذ الصيغة التالية

$$f(x,t)=e^{ik_0x-i\omega(k_0)t}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha k'^2}e^{ik'(x-v_gt)}e^{-ik'^2\beta t/2}dk'$$
$$=e^{ik_0x-i\omega(k_0)t}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ik'(x-v_gt)}e^{-(\alpha+i\beta t)k'^2}dk'$$

وهذا مماثل تماما للتكامل الذي حصلنا منه على الصيغة الموجية (2.22) ولذا فإننا يمكن أن نستثمر النتيجة السابقة للتكامل وذلك بالتعويض عن x بالكمية $x-\text{v}_g t$ وعن α بالكمية $\alpha+i\beta t$ فإننا نحصل على

$$f(x,t)=e^{i(k_0x-\omega(k_0)t)}\left(\frac{\pi}{\alpha+i\beta t}\right)^2 e^{-[(x-v_gt)^2/4(\alpha+i\beta t)]} \qquad (2.23)$$

وهكذا فإن

$$|f(x,t)|^2=\left(\frac{\pi^2}{\alpha^2+\beta^2t^2}\right)^2 e^{-[\alpha(x-v_gt)^2/2(\alpha^2+\beta^2t^2)]}$$
(2.24)

إن هذه الصيغة تعبر عن رزمة موجية يتحرك مركزها أو قمتها بسرعة قدرها v_g لكن ليس لها عرض محدد فإن الكمية التي كان مقدارها α في البدء (أي عند الزمن صفر) قد صارت الآن $(\alpha+\beta^2t^2/\alpha)$ وهذا يعني أن رزمة الأمواج تنتفخ. وبما أن عرض الزمرة يتناسب مع

$$(\alpha+\beta^2t^2/\alpha)^{1/2}=\sqrt{\alpha}(1+\beta^2t^2/\alpha^2)^{1/2}$$

فإن معدل الإنتفاخ سوف يكون صغيرا فيما لو كانت α كبيرة أي فيما لو كانت الزمرة كبيرة ابتداءً. وهذا هو السبب في أن موجودات العالم الجهري لا تضيع أثناء حركتها على حين أن الجسيمات في العالم المجهري تضيع بعد فترة قصيرة من حركتها.

مثال تطبيقى: هدفنا في هذا المثال تبيان الفرق بين الجسيمات النسبوية والجسيمات اللانسبوية. لندرس ما يحصل لحزمة إلكترونات أطلقت لمسافة 10000 كيلومتر. فإذا كان

عرضها الابتدائي هو ملميتر واحد، فما عرضها عند الوصول إذا كانت طاقتها الحركية (أ)13.6 eV (ب)100 MeV.

الحل: (أ) نظرا لأن الطاقة الحركية قليلة نسبة إلى طاقة كتلة السكون للإلكترون فإن هذه الحالة لا نسبوية. ومن خلال الطاقة الحركية نحسب السرعة $v=\sqrt{\frac{2E}{m}}$ لنجد أنها 2.1×10^{6} متر/ثا ومنها نحسب الزمن المستغرق لقطع المسافة البالغة 10000 كيلومتر ونجد أنها تساوي 4.6 ثا. وهنا لدينا

$E=\hbar\omega=\frac{p^{2}}{2m}=\frac{\hbar^{2}k^{2}}{2m}$ وهذا يعني أن $\omega=\frac{\hbar k^{2}}{2m}$ وبالتالي فإن $\beta=\frac{\hbar}{m}$ كذلك يجب أن نلاحظ أن $w(0)=\sqrt{2\alpha}$. وهذا يعني أن

$$\frac{w(t)}{w(0)}=\sqrt{1+\frac{\beta^{2}t^{2}}{2\alpha^{2}}}=\sqrt{1+\frac{\hbar^{2}t^{2}}{2m^{2}\alpha^{2}}}=\sqrt{1+\frac{2\hbar^{2}t^{2}}{m^{2}w^{4}(0)}}$$

ومنها نجد

$$w(t)=(10^{-3}m)\sqrt{1+\frac{2(1.05\times10^{-34}J.s)^{2}(4.6s)^{2}}{(0.9\times10^{-30}kg)^{2}(10^{-3}m)^{4}}}=7.5\times10^{-2}m$$

أما بالنسبة للحالة الثانية فإن طاقة الإلكترون فيها عالية وبالتالي فإن الصيغة التي نحتاجها في حساب السرعة هي الصيغة النسبوية $E=pc$ أي أن $\omega=kc$ وفي هذه الحالة ستكون $\beta=0$ مما يعني أنه لن يكون هنالك إتساع في عرض الحزمة. من هذا المثال نستنتج أن الجسيمات النسبوية لا تعاني من مشكلة انتفاخ الرزمة الموجية على حين تعاني الجسيمات اللانسبوية من هذه المشكلة. ويتضح من هذا المثال أن الجسيمات النسبوية في المسرعات لا تضيع بينما يمكن أن تضيع الجسيمات اللانسبوية.

مثال ثان: هدفنا في هذا المثال التمييز بين ما يحصل لجسيم مايكروسكوبي وجسم ماكروسكوبي حيث سنعالج مسألة انتفاخ الرزمة الموجية الغاوسية للجسيم الحر إذ تكون $\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$ ونستخدم المعادلة (2.24) أعلاه لحساب التغّير في حجم الرزمة الموجية خلال ثانية واحدة من حركتها إذا كانت الرزمة تمثل: (أ) إلكتروناً بحيث يكون حجم الرزمة الابتدائي هو 10^{-4} سم و 10^{-8} سم. (ب) جسيماً كتلته 1 غرام وقطره 1 سم.

الحل: (أ) لدينا $\omega = \hbar k^2/2m,\ \beta = \hbar/m$ كذلك فإن $w(0) = \sqrt{2}\alpha$ وبالتالي فإن $\frac{w(t)}{w(0)} = \sqrt{1+\frac{\beta^2 t^2}{2\alpha^2}} = \sqrt{1+\frac{\hbar^2 t^2}{2m^2\alpha^2}} = \sqrt{1+\frac{2\hbar^2 t^2}{m^2 w^4(0)}}$ وهكذا إذا كانت $t = 1$ s و $m = 0.9 \times 10^{-30}$ kg وكانت $w(0) = 10^{-6}$ m فإن ذلك يؤدي الى $w(1) = 1.7 \times 10^{2}$ m. ولكن عندما تكون $w(0) = 10^{-10}$ m فإن $w(1) = 1.7 \times 10^{6}$ m.

(ب) بالنسبة الى الجسيم الذي كتلته 10^{-3} kg و $w(0) = 10^{-2}$ m فإن

$$\frac{2\hbar^2 t^2}{m^2 w^4(0)} = \frac{2(1.05\times10^{-34} J.s)^2 t^2}{(10^{-3} kg)^2 \times (10^{-2} m)^4} = 2.2\times10^{-54}$$

وهكذا نجد أن الجسيم الماكروسكوبي لا يعاني كثيراً من التضخم في رزمة الأمواج على حين أن رزمة الأمواج للإلكترون المايكروسكوبي تعاني تضخماً كبيراً. ولكن ماذا يعني انتفاخ رزمة الأمواج؟ إنه ببساطة يعني ضياع الجسيم من خلال ضعف إمكانية تحديد موقعه بشكل مضبوط.

أسئلة مفاهيمية للفصل الثاني

ثنائية الموجة والجسيم

1. ما هي فرضية دي بروي؟ وما مضمونها؟
2. ما هي دوافع فرضية دي بروي؟
3. ما هي رزمة الأمواج وماذا تمثل؟
4. إعط مثالاً للصيغة الرياضية لرزمة الأمواج.
5. كيف يمكننا تحييز الموجة؟
6. ما موجة الزمرة Group Wave؟ وما سرعتها قياسا الى سرعة الجسم؟
7. ما هي أمواج الطور Phase Waves وما سرعتها قياسا الى سرعة الجسم؟

مبدأ عدم التحديد (اللادقة)

1. ما منطوق مبدأ عدم التحديد؟ وما مضامينه؟
2. ما الجسيمات المجازية Virtual Particles؟ وما مشروعية إفتراضها؟
3. ما هي أصول مبدأ اللادقة وعن أي مفاهيم نشأ؟
4. ما هو مآل مبدأ عدم التحديد لو كان ثابت بلانك أصغر كثيرا من قيمته الحالية؟
5. ماذا سيكون عليه الحال في عالم يكون فيه ثابت بلانك أكبر من قيمته الحالية كثيراً؟
6. صف بشكل مختصر عالماً يعتمد في حركاته وقياساته على الصوت وليس على الضوء كوسيلة للملاحظة والقياس.

تحويلات فوريه

1. ما فضاء الإحداثيات وما فضاء الزخم؟

2. ماذا تمثل متسلسلة فورييه في التمثيل الموجي للنظم الفيزيائية؟
3. ما المعنى الفيزيائي لمعاملات فورييه في التمثيل الموجي للنظم الفيزيائية؟
4. ماذا يعني انتفاخ الرزمة الموجية الكمومية؟ وما هي تأثيراته على عمليات القياس في ميكانيك الكم؟
5. إذا كانت الرزمة الموجية الكمومية تنتفخ فكيف يتم المحافظة على حزم الجسيمات الأولية في المسرعات النووية.

مسائل الفصل الثاني

س1) إذا علمت أن سرعة أمواج الشد السطحي في المياه السطحية هي

$$v = \sqrt{\frac{2\pi T}{\rho \lambda^3}}$$

حيث T هو الشد السطحي و ρ هي الكثافة. إحسب سرعة موجة الزمرة وسرعة موجة الطور.

س2) (أ) جد تحويل فورييه للدالة

$$\begin{aligned} \phi(k) &= A(a-|k|) \qquad && |k| \le a \\ &= 0 && |k| > a \end{aligned}$$

حيث أن A و a هو ثوابت موجبة.

إحسب مقدار اللادقة Δx و Δp ثم تأكد من أن مضروبها يتوافق مع مبدأ اللادقة.

س3) إحسب العرض النهائي لرزمة الموجة لجسيم حر بعد أن يسير 100 متر للحالات التالية:

(أ) إلكترون طاقته 25 إلكترون فولط وعرضه 10^{-6} متر.

(ب) إلكترون طاقته 100 مليون إلكترون فولط وعرضه الإبتدائي 1 ملم

(ج) جسيم كتلته 100 غم حجمه 1سم يتحرك بسرعة 50 متر/ثا.

(د) إحسب الأزمنة لإنتشار زمرة الموجة في (أ) و (ج) بمقدر 10ملم و 10سم.

س4) استخدم مبدأ اللادقة لتقدير الحد الأدنى للطاقة الحركية لجسيم كتلته m محصور في صندوق صلب ذي بعد واحد مقداره L.

س5) إستخدم مبدأ اللادقة لتقدير نصف قطر ذرة االهيدروجين في الحالة الدنيا وطاقتها في هذه الحالة.

س6) إذا كانت السرعة الزاوية هي $\omega = \sqrt{gk + Tk^3/\rho}$ حيث أن g هو تسارع الجاذبية و ρ هي الكثافة وT هي الشد السطحي.

جد سرعة الطور وسرعة الزمرة في حالتين: (أ) عندما يكون الطول الموجي كبيرا. و(ب) عندما يكون الطول الموجي قصيراً.

س7) خذ الدالة الموجية

$$\psi(x) = Ae^{-\mu|x|}$$

احسب A بحيث تكون الدالة مقومة.

إحسب دالة الموجة في فضاء الزخم $\phi(p)$.

الفصل الثالث

الميكانيك الموجي: معادلة شرودنجر في بعد واحد

التمثيل الموجي للنظم الفيزيائية

يتعامل ميكانيك الكموم مع النظم الفيزيائية التي هي عبارة عن جسيمات Particles وقوى Forces. ونظراً لأن الجسيمات المجهرية تتصرف على الأغلب تصرفا ثنائيا بين الموجة والجسيم فإنها تُمثَّل برزمة موجية متحيزة Localized Wave Packet كما أسميناها. أما القوى المؤثرة والفاعلة في النظم الفيزيائية فتمثل بالجهود Potentials. ونظرا لأن البنية الرياضية والحسابية لأي نظرية فيزيائية تحتاج الى معادلة أساسية تكون بمثابة الدستور العام لحساب الحركة والطاقة فقد كان لابد من إيجاد معادلة عامة شاملة تؤسس لميكانيك الكموم.

معادلة شرودنجر في بعد واحد

بعد أن تم تمثيل الجسيم بكينونة موجية أصبح من الضروري وضع معادلة لضبط حركة الجسيم سواء كان ذلك مقيداً أو حراً. وقد استنبط النمساوي إرفن شرودنجر عام 1926 معادلة الحركة للجسيم في مجال جهدي. ويمكننا اعتماد طريقة سهلة للوصول الى هذه المعادلة في بعد مكاني واحد باستعمال التمثيل الموجي للجسيم. في التعبير (2.18) لدينا

$$\psi(x,t) = Ae^{i(px-Et)/\hbar}$$

ومنها نجد

$$\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x} = \frac{ip}{\hbar}\psi(x,t)$$

وأيضا

$$\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} = -\frac{p^2}{\hbar^2}\psi(x,t)$$

ومنه نجد أن

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} = p^2\psi(x,t)$$

كذلك

$$\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{iE}{\hbar}\psi(x,t)$$

ومنها نستنتج أن

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = E\psi(x,t)$$

وباستخدام معادلة الحركة العامة في الفيزياء الكلاسيكية أو ما يسمى قانون حفظ الطاقة الميكانيكية الكلية مكتوباً بالصيغة التالية

$$\frac{p^2}{2m}\psi(x,t) + V\psi(x,t) = E\psi(x,t) \qquad (3.18)$$

نجد بالتعويض عن p وE من العلاقات آنفة الذكر أن

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} + V\psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} \qquad (3.19)$$

هذه هي معادلة الحركة في الميكانيك الكمي وتسمى **معادلة شرودنجر المعتمدة على الزمن**. Time-dependent Schrodinger Equation حيث تسمى $\psi(x,t)$ دالة الموجة Wave Function.

في حالة أن تكون $\psi(x,t)$ غير معتمدة على الزمن كأن يكون الزمن عبارة عن معامل طوري Phase factor فإن

$$\psi(x,t) = \psi(x)e^{-iEt/\hbar} \qquad (3.20)$$

وبالتالي عند التعويض في المعادلة (3.19) نحصل على

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2} + V\psi(x) = E\psi(x) \qquad (3.21)$$

تسمى هذه **معادلة شرودنجر غير المعتمدة على الزمن** Time-independent Schrodinger Equation.

من الواضح أن معادلة شرودنجر غير المعتمدة على الزمن تنطبق في حالة النظم السكونية Staionary Systems كالنظم الحركية الدورية التي يكون فيها الزمن عامل طوري. ويكون الجهد V غير معتمد على الزمن. على حين أن معادلة شرودنجر المعتمدة على الزمن تستخدم لحل المسائل التي يكون فيها الجهد معتمدا على الزمن.

إن الغاية الأساسية من تشكيل معادلة شرودنجر هو القيام بحلها كمعادلة تفاضلية وفقاً للشروط الفيزيائية للمسألة والتي نسميها الشروط الحدودية Boundary Conditions وذلك للحصول على دالة الموجة $\psi(x,t)$. إذ أننا عندما نحصل على $\psi(x,t)$ فإننا نحصل على كافة المعلومات المطلوبة عن النظام الفيزيائي الذي في المسألة. وسنقوم لاحقا بحل هذه المعادلة لنظم مختلفة. إن معادلتي شرودنجر آنفتي الذكر تنطبقان على النظم اللانسبوية أي التي تكون فيهما سرعة الجسيمات أقل كثيرا من سرعة الضوء ولا تصلح للتطبيق في حالة دراسة النظم النسبوية.

يلاحظ أن معادلة شرودنجر المعتمدة على الزمن تشبه الى حد كبير معادلة الإنتشار الحراري Thermal Diffusion Equation. ولهذا الشبه مضامينه النظرية. ومن الضروري هنا الإشارة الى أن شرودنجر نفسه إنما أراد صياغة معادلة الحركة في ميكانيك الكم في إطار الفهم الكلاسيكي القائم على الإتصال فجاءت معادلته عبارة عن معادلة تفاضلية في الإطار الكلاسيكي نفسه لمعادلة القيمة المخصوصة Eigenvalue Equation. وهكذا كان شرودنجر شخصيا ينظر الى معادلته.

التصور الإجرائي لمعادلة شرودنجر

يمكن فهم معادلة شرودنجر أنها معادلة إجرائية Operator Equation حيث يمثل الهاملتوني وهو

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$

ما نسميه "إجراء" الطاقة الكلية Energy Operator وفي حالة كون النظام لا يعتمد على الزمن فإن الهاملتوني هو الجزء الأول أي الطرف الأيسر من المعادلة

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V$$

أما إذا كان النظام معتمداً على الزمن فإن

$$\hat{H} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$

من جانب آخر فإن إجراء الزخم Momentum Operator يكون

$$\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$$

هذا التصور الإجرائي سوف نبحثه في الفصل السادس من الكتاب. لكنني هنا أريد فقط التمييز بين التصور التفاضلي الموجي والتصور الإجرائي وهو شأن آخر.

تفسير دالة الموجة

في الحالة العامة تكون دالة الموجة Wave Function دالة للمكان والزمان $\psi(x,t)$ وهي نتاج لحل معادلة شرودنجر. وبذاتها فإن دالة الموجة هي دالة رياضية تمثل النظام الموصوف تمثيلاً موجياً وفق التصور الذي قدمه شرودنجر ولهذا السبب سميت بدالة الموجة. ولهذا

السبب نفسه سمي ميكانيك الكم القائم على معادلة شرودنجر أول الأول بالميكانيك الموجي Wave Mechanics.

إن دالة الموجة التي تحتويها معادلة شرودنجر يمكن أن تكون معقدة أي أن تحتوي جزءً حقيقياً Real Part وجزءً خيالياً Imaginary Part. ولهذا السبب يقال أن دالة الموجة ليس لها معنى فيزيائي، لأن الجزء الخيالي لا يمكن قياسه مباشرة وبالتالي فهو كمية غير فيزيائية. وقد قدم ماكس بورن تفسيراً لدالة الموجة يقول بأن حل معادلة الموجة أساسا يعطينا وصفا لسعة الموجة في أي لحظة زمانية وأي مكان نعينه. بالتالي فإن $|\psi(x,t)|^2$ هي مربع السعة وهذا هو تعبير عن شدة أو كثافة تواجد الموجة في الموقع x عند اللحظة الزمانية t. وحين ننظر الى النظام على أنه مجموعة جسيمات منفصلة فإننا يمكن أن نعتبر $|\psi(x,t)|^2\,dx$ هي كثافة إحتمالية وجود الجسيمات في الموقع المحصور بين x و$x+dx$ عند اللحظة الزمانية t. إن كثافة الإحتمالية ليست متجانسة بالضرورة ويمكن أن تبلغ أعلى مقدار لها عند موقع معين يمكن إيجاده من $\left(\frac{d\,|\psi(x,t)|^2}{dx}\right)=0$، حيث نستخرج منها قيمة x التي عندها تكون كثافة الإحتمالية أكبر ما يكون. أما الإحتمالية الكلية لوجود الجسم في أي مكان من العالم فهي

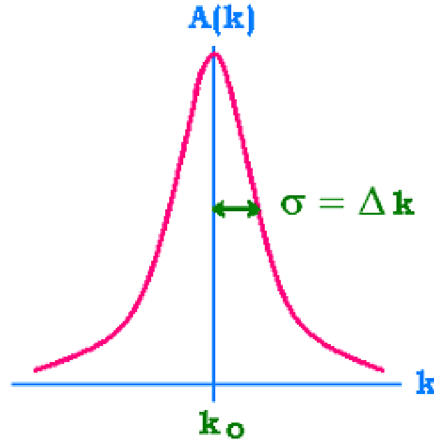
$$P(x)=\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x,t)|^2\,dx \qquad (3.22)$$

أما إذا كان القصد حساب الإحتمالية الكلية لإيجاد الجسيم في نطاق محدود من الفضاء فإن التكامل عندئذ يشمل فقط حدود الفضاء المقصود. ومن الناحية النظرية تنتشر دالة الموجة للجسيم الحر (غير المقيد مكانياً) على الفضاء المفتوح كله. ومن هذا المنطلق نجد البعض يقول بأن الجسيم الحر الموجود على الطاولة أمامنا يتواجد أيضا، ولكن بإحتمالية أقل، في أي مكان آخر يبعد قليلا أو كثيرا عن الطاولة. إنما تقل إحتمالية وجود الجسيم كلما ابتعدنا عن الموقع الذي يشاهد فيه الجسيم. وهذا الواقع يتم تمثيله بما يسمى توزيع

غاوس Gaussian Distribution أو التوزيع السوي Normal Distribution. هذا يعني أن التصوير الموجي للجسيم يفقده صفة التموضع التام في نقطة أو ضمن حدود معرّفة بدقة كما هو الحال عليه في الحالة التقليدية. وهذا ما يمنح التصوير الموجي للجسيمات صفة الإمتداد وكأنه بقية من بقايا الصفة الموجية علقت بالجسيم. أما الطبيعة الإحتمالية لوجود الجسيم وبقية العوامل والصفات التي يحملها فإن سببها ما تبقى من صفة التغير الدائم التي هي جزء تكويني في الموجة. لذلك نؤكد أن التصور الكمومي يقدم كينونة جديدة لا هي بالجسيم ولا هو بالموجة.

الطبيعة الإحتمالية للنظم

من هذا المنطلق يمكن أن نفهم الطبيعة الإحتمالية لدالة الموجة وما تتضمنه من صفات الجسيم أنها ناشئة عن صفة التجدد المستمر الذي تتصف به الأمواج بخاصة. فلما قمنا بعملية "تمويج" الجسيمات أصبح من الضرورى أن تلحق هذه الصفة أعني صفة التجدد المستمر بالجسيمات أيضاً. إن توافق التمثيل الموجي للجسيمات مع التجارب الفيزيائية يؤكد أن هذه الصفة هي صفة طبيعية في الأشياء وليست صفة طارئة أو ملصقة بها.



الشكل (3–1) التوزيع الغاوسي في فضاء الزخم

ومن هذا المنطلق ايضا برز الرأي القائل بأن الجسيم الذي يتواجد في موقع ما فإنما يمكن التحقق من تواجده فعلا في موقعه بنسبة احتمالية هي ليست 100% في كل الأحوال بل أقل من 100% وذلك لأن مبدأ اللادقة يمنع القطع بتحديد موقع الجسيم وزخمه في حيز محدد 100%. وأصل هذه الخاصية يمتد الى التصور الموجي الذي تم بتركيب تصور الجسيم عليه، فطلبنا تحييز الموجة فكان أن تمكنا من حصر الموجة في حيز صغير لكنه مهما صَغُر فإنه لن يصير الى نقطة ما لم يكن عدد الأمواج المجتمعة يشمل نطاقا لا نهائيا من ترددا‌تها وأطوالها الموجية. فعندئذ فقط نتمكن من تمثيل الجسيم بدالة ديراك.

ولتوضيح القصد نقول لو كان لدينا 100 خرزة ملونة 40 منها حمراء و25 خضراء و20 منها بيضاء و15 منها زرقاء فإذا أسقطناها اسقاطا حرا على سطح طاولة مقسم الى مربعات كل منها مساحته 10 سم مربع فإن الخرزات ستتوزع على السطح عشوائياً لكنني من المتوقع أن أجد في كل مربع عددا من الخرزات الحمر أكثر من الخضر وعدد من الخرزات الخضر أكثر من عدد الخرزات البيض وخرزات بيض أكثر من الزرق. لكن ليس هذا بالضرورة ما يحصل فقد أجد مربعا خاليا من الخرز تماما أو فيه خرزة واحدة خضراء. لقد ذهب ألبرت أينشتاين الى هذا النمط من الفهم لتفسير ميكانيك الكم فاعتبر النظم الكمومية هي تعبير عن عدد كبير من الجسيمات يضمها جمع Ensemble واحد وفيه حالات مختلفة. حتى أننا إذا أردنا قياس شئ من صفات النظام فإنه سيظهر لنا في إحدى حالاته الممكنة.

مثال آخر: لو أننا وضعنا هذه الخرزات المئة في كيس ثم أدخلنا يدنا لنلتقط بشكل عشوائي واحدة منها فإن إحتمالية أن نحصل على خرزة حمراء هي 40% اي 0.4 وأن نحصل على خرزة خضراء هو 25% أي 0.25 وأن نحصل على بيضاء هو 20% أي 0.2 وأن نحصل على زرقاء 15%. الإحتمالية الأعظم هي للخرزة الحمراء في اي سحبة أولى لكن في

السحبة الثانية يصبح احتمالية الحصول على حمراء هو 0.16 بينما تبقى إحتمالية أن نحصل على خرزة خضراء هي 0.25 أي أكبر من الحمراء. وهكذا لو أننا استخرجنا الحمراء والخضراء فإن إحتمالية أن نحصل على خضراء مرة ثانية هي 0.0625 وهكذا.

ولكن كيف يمكن أن نفهم سبب الإحتمالية عندما يكون لدينا جسيم واحد في النظام. هنا نفهم أن الإحتمالية ناتجة عن الحالات المختلفة للجسيم الواحد في هذه الحالة. أي أن أي جسيم أو نظام في ميكانيك الكموم هو ليس إلا مجموع من الأحوال لا يستقر على حال واحد منها بل كلما نظرنا إليه نجده في واحدة من تلك الحالات. بمعنى أن حالة التجدد الدائم تجعل الجسيم يتمظهر كل آن بمظهر من أحد أحواله وهي في حالة تبدل سريع ومستمر. ولكن هل يعني هذا أن القلم الأزرق الذي بيدي سوف يصبح أحمراً بعد لحظة ثم أخضراً بعد لحظة أخرى؟ والجواب لا هذا لن يحصل في الواقع لسببين الأول أن سرعة تبدل الأحوال كبيرة جداً، والثاني وهو الأهم أن تقلب اللون بين الأحوال (الألوان) يتبع اللون الغالب الأصل ذي الإحتمالية الأعظم. ولذا يظهر القلم أزرق لا يتبدل رغم أنه في الحقيقة (وليس في الواقع) يتبدل على طيف الألوان الممكنة جميعاً. ومن هنا يظهر لنا أن حالة النظام الإجمالية هي مجموع الحالات الممكنة له. وهذا ما يسمى مبدأ التراكب Superposition Principle.

لاحظ أن التمثيل الموجي للنظام الفيزيائي يحتم وجود عناصره او مركباته مترابطة مع بعضها البعض بشكل أو بآخر مما يجعل إستقلالية التمثيل الجسيمي الصرف الذي ألفناه بحسب التصور الكلاسيكي غير محققة تماماً. بل ربما يصبح الجسيم ممتداً في نطاق لانهائي من المكان ما لم يحده حد قاطع. فمثلا يمكن يتم تمثيل الإلكترون الطليق في فضاء غير محدود كدالة موجة ممتدة لانهائيا في المكان. أما لو حُصر هذا الإلكترون في حدود، مثلا وضع في صندوق ذي جدران لا يتمكن من اختراقها، فإنه عندئذ سيكون محصورا في ذلك

المكان وسيُمثِّل ساعتها بدالة موجية واقفة Standing Wave تتراوح بين جدران الصندوق جيئة وذهاباً. وهذا ما يجعل هذه الموجة تتداخل مع نفسها فتؤلف بطوناً وعقداً تشغل مواقع معينة مسموح للأكترون أن يتواجد فيها فقط. ولا يتواجد في غيرها وتكون للإلكترون طاقات مسموحة عند قيم معينة وليس أي قيمة كانت. هذا ما سنعالجه عند حل مسألة الجسيم في صندوق في الفصل الرابع.

الشروط العامة لدالة الموجة

هنالك شروط عامة جدا يتوجب أن تحققها دالة الموجة لأي نظام كي ما يتم اعتباره نظاما فيزيائيا. وهذه هي

1. أن تكون قيمة الدالة محدودة في المالانهاية من طرفيها.
2. أن تكون الدالة ذات قيمة مفردة Single-Valued عند أي نقطة في المكان أو الزمان.
3. أن تكون الدالة متصلة مكانيا غير منقطعة وغير مُفرّدنة Singular.

هذه الشروط العامة الثلاثة تُحجِّم أي حل رياضي عام للدالة الموجية وتضبطه بالإشتراطات الفيزيائية. ثم تأتي الشروط الحدودية Boundary Conditions للمسألة لتصف حدود الدالة الموجية بدلالة متغيراتها. ومن خلال هذه الشروط نتمكن من حساب كثير من المجاهيل التي يقدمها الحل الرياضي العام مثلا ثوابت التكاملات والتي كثيرا ما تظهر مع أية حلول لمعادلات تفاضلية.

تقويم دالة الموجة

لما كانت $|\psi(x,t)|^2$ تتناسب مع كثافة الإحتمالية و P هي الإحتمالية الكلية، فهل يمكن تسوية أو تقويم دالة الموجة حتى تصبح الإحتمالية الكلية هي واحد صحيح؟ أي هل يمكن

أن نجعل الإحتمالية الكلية هي 100%؟ طبعاً هذا العمل سوف يسهل علينا معرفة متى تكون الإحتمالية في أعلى حالاتها ومتى تكون في أوطأ حالاتها.

إننا يمكن أن نجعل الإحتمالية الكلّية تساوي 1 صحيح بضرب دالة الموجة بمقدار ثابت مثل A يجعل الإحتمالية الكلية واحد صحيح، فنكتب

$$\Phi(x,t) = A\psi(x,t) \qquad (3.23)$$

لتكون هي الدالة المقوَّمة، ثم نجعل الإحتمالية الكلية لها تساوي واحد صحيح فيكون لدينا

$$P(x) = |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x,t)|^2 \, dx = 1$$

وبالتالي يكون ثابت التقويم هو

$$|A| = \sqrt{\frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x,t)|^2 \, dx}} \qquad (3.24)$$

بالتالي نحسب ثابت التقويم A من هذه العلاقة. لاحظ أنه إذا كانت دالة الموجة في أكثر من بعد واحد مكاني فإن التكامل سيجري على جميع الأبعاد.

مثال حول تقويم دالة الموجة: إذا علمت أن $\Phi(\phi) = Ae^{im\phi}$ تمثل دالة موجية لجسم يدور في مدار ثابت بحيث يكون $0 \le \phi \le 2\pi$. فما هي الدالة المقومة؟

الحل: نكتب

$$\int_0^{2\pi} \Phi^* \Phi d\phi = 1$$

(3.25)

لنجد أن

$$|A|^2 \int_0^{2\pi} e^{-im\phi} . e^{im\phi} d\phi = 1$$

أي أن $|A| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. وهكذا تكون الدالة المقومة هي

$$\Phi(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\phi}$$
(3.26)

مبدأ التراكب The Superposition Principle

تكلمنا عن جمع الأمواج وإنشاء الرزمة الموجية Group Wave التي هي الدالة الموجية الممثلة للنظام ووجدنا أنها تتألف من مويجات الطور Phase Waves. هذه المويجات تمثل حالات مختلفة للنظام الكمومي. بمعنى أن الجسيم المتمثل برزمة موجية لا يستقر على حال بل يتردد بين الأحوال States التي تؤلفه خلافا للتصور الكلاسيكي للجسيم الذي يكون مستقرا ثابتاً. وهذا ما حصل عندما أردنا إنشاء كينونة جديدة تجمع بين صفة الموجة وصفة الجسيم فكان أن ضحينا بثبات حالة الجسيم وكسبنا صفة التحيز.

لذلك يفترض ميكانيك الكموم أن حالة أي نظام هي نتيجة لتراكب Superposition كافة الحالات الممكنة للنظام. وهكذا فإن كانت لدينا دالة مثل $\psi(x)$ فإننا قادرون على نشر هذه الدالة بدلالة مفرداتها التي تؤلفها فنكتب

$$\psi(x) = \sum_n a_n u_n(x) \tag{3.27}$$

حيث أن $u_n(x)$ هي مكونات للرزمة الموجية وهي دوال أُسسيّة Basis Functions متعامدة على بعضها، أي

$$\int u_m^*(x) u_n(x) dx = \delta_{mn} \tag{3.28}$$

حيث يجري التكامل على مدى x كله. وإن a_n هي معاملات تحدد حصة كل دالة أساسية $u_n(x)$ في الدالة العامة $\psi(x)$. ولإيجاد قيم كل من المعاملات نضرب طرفي المعادلة

$u_n^*(x)$ في (3.27) ونكامل على مدى الفضاء ثم نستخدم علاقة التعامد أعلاه ليكون لدينا

$$\int u_m^*(x)\psi(x)dx = \int \sum_n a_n u_n(x) u_m^*(x)dx$$
$$= \sum_n a_n \delta_{mn} = a_m \qquad (3.29)$$

وهكذا يتبين لنا أن قيمة المعاملات a_n هي مقدار تطابق $\psi(x)$ مع $u_n(x)$ عند أي لحظة من اللحظات. وهكذا فإن احتمالية أن تكون $\psi(x)$ هي في الحالة $u_n(x)$ هي $|a_n|^2$.

ولكن هل يمكننا إثبات أن الإحتمالية الكلية أن توجد $\psi(x)$ في أي من الحالات هو واحد صحيح؟ بمعنى هل يمكن أن نثبت أن مجموع المربعات هو واحد صحيح؟ نعم بالفعل هذا ممكن. لنأخذ الدالة المقومة $\psi(x)$. لدينا

$$\int \psi^*(x)\psi(x)dx = 1 = \int \sum_n a_n^* u_n^*(x) \sum_m a_m u_m(x)dx$$

وباستخدام علاقة التعامد (3.8) نحصل على

$$\sum_n \sum_m a_n^* a_m \delta_{mn} = \sum_n |a_n|^2 = 1 \qquad (3.30)$$

أي أن مجموع مربعات المعاملات a_n هو بالفعل الاحتمالية الكلية لوجود الجسيم في الحالة $\psi(x)$.

صُهيب وقمصانه الستة

لنفرض أنني راقبت الطالب صهيب على مدى زمني طويل فوجدته يتداول لبس ستة ألوان من القمصان. الأسود والأحمر والأخضر والأزرق والأصفر والبني. لذلك يمكنني أن أقول أن صهيب له ستة أحوال لونية. لكنني وجدته لا يتداول لبسها بمعدل ثابت بل يلبس

القميص الأخضر أكثر من غيره ويلبس الأصفر أقل من بقية الألوان. فهاهنا أعلم أنني لو أردت أن أتوقع ما سيكون لون قميص صهيب لقلت أن الأكثر إحتمالا هو الأخضر. ولو كان صهيب يتداول لبس القمصان بمعدل ثابت لقلت أن إحتمالية أن أجده في أي حالة منها هي نفسها وهي واحد على ستة. لكن كون الأخضر أكثر احتمالا يعني أن صهيب أكثر ميلا للبس القميص الأخضر ربما لأن هذا اللون يناسب مزاجه أو لأن القميص الأخضر تحديدا هو أكثرها جدة وأناقة. وهذه عوامل تجعله يميل أكثر الى استخدام القميص الأخضر. إن لهذا الميل أسبابه بالضرورة وهذه الأسباب ربما تكون ذاتية Intrinsic متعلقة بشخصه ومزاجه أو هي موضوعية خارجية. وفي كل الأحوال فهي تمثل الظروف المحيطة به. وفي الصورة الفيزيائية تمثل هذه الظروف بالجهد V الذي يدخل في معادلة شرودنجر ويحكم معادلة الحركة، ولو لم يكن هنالك جهد فإن حل معادلة شرودنجر يعطينا متجه حالة لجسيم حر ذي أحوال مختلفة لكنها بإحتماليات متساوية. وهذا يعني أن صهيب لو تخلى عن جميع الظروف التي تحكم ميوله فإنه سيكون حراً Free تماما ويتداول لبس قمصانه بنفس المعدل.

هذه الألوان الستة يمكن أن أعتبرها أحوال مختلفة لصهيب فيمكن أن نقول صهيب الأخضر وصهيب الأحمر وهكذا دواليك. وإحتمالية كونه في القميص الأخضر هي الأعلى أي أن $|a_{green}|^2 = P_{\max}$ وأن $|a_{yellow}|^2 = P_{\min}$ وبالتالي فإن صهيب الأخضر هو الأكثر إحتمالاً وصهيب الأصفر هو الأقل إحتمالاً. وفي كل الأحوال فإنني في أي يوم أقابله سأجده لابساً واحداً من تلك القمصان التي تؤلف مجموعة كاملة Complete Set.

يتضح لنا الآن هذا المفهوم الأساسي في ميكانيك الكموم الذي يقرر أن أي دالة موجية لأي نظام فيزيائي يمكن نشرها بدلالة مركباتها التي تمثل أحوالها الممكنة. مثال ذلك حالة الإلكترون في نظام عندما يتخذ حالات محددة فإننا نقوم بوصف هذا النظام بدلالة

الحالات التي يتخذها. ولكي نحسب إحتمالية وجوده في أي منها عند أي لحظة فإننا نحسب نطابق حالته المعينة مع حالة النظام الكلية ومقدار المطابقة هو ما يحدد قيمة إحتمالية وجوده على تلك الحالة.

مثال لحساب إحتماليات الحالات: لنفرض أن لدينا الدوال الأسسية التالية

$$\Phi_m(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\phi}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3.......$$

ولنأخذ جسيما يدورعلى محيط دائرة ونعبر عن دالته الموجية بالصيغة العامة التالية

$$\psi(\phi) = \frac{2}{\sqrt{3\pi}} \cos^2(\phi)$$

التي يمكن أن نتصورها مؤلفة من مجموعة محدودة من الدوال الأسسية التي ذكرناها أعلاه.

والسؤال: ماهي إحتمالية أن يكون الجسيم في الحالة $m = -2$؟

الجواب: إن إحتمالية أن يكون الجسيم في الحالة $m = -2$ هي ببساطة $|a_{-2}|^2$. ولكن ما هي $|a_{-2}|^2$؟ نحسبها. نفتح الدالة الممثلة للنظام بدلالة الدوال الأسسية لنجد أن

$$\psi(\phi) = \sqrt{\frac{4}{3\pi}} \left(\frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2} \right)^2 = \sqrt{\frac{1}{12\pi}} \left(e^{2i\phi} + 2 + e^{-2i\phi} \right)$$
$$= \sqrt{\frac{1}{6}} \left(\Phi_2 + 2\Phi_0 + \Phi_{-2} \right)$$
$$= a_2\Phi_2 + a_0\Phi_0 + a_{-2}\Phi_{-2}$$

وهذا يعني أن $a_{-2} = \sqrt{\frac{1}{6}}$. أي أن $P(-2) = |a_{-2}|^2 = \frac{1}{6}$.

لاحظ أن $P(2) = |a_2|^2 = \frac{1}{6}$ وأن $P(0) = |a_0|^2 = \frac{4}{6}$ وهذا يعني أن الإحتمالية الكلية هي واحد صحيح لأن الدالة مقومة.

القيم المتوقعة Expectation Values

في ميكانيك الكم هنالك دوال وإحتماليات، والقيم التي تأخذها الكميات الفيزيائية هي قيم إحتمالية وليست قطعية لأن النظم الكمومية كما قلنا لا تثبت على حال. فكيف إذن نتعامل مع هذه النظم؟ والجواب أننا نتعامل مع معدل القيم خلال مجموعة من القياسات المتعاقبة وليس مع قيمة واحدة منها. وهذا المعدل المأخوذ لقيم كثيرة مسموحة هو ما يسمى القيمة المتوقعة Expectation Value وليست القيمة المتوقعة هي الأكثر إحتمالية بالضرورة بل هي ما نتوقع أن نجده من خلال معدل Average مجموعة كبيرة من القياسات. بمعنى أننا قد نقيس كمية فيزيائية في نظام كمومي ولا نجدها مطابقة للقيمة المتوقعة بل مختلفة عنها قليلا أو كثيراً. أما في النظم الجهرية Macroscopic Systems فإن القيمة التي نجدها في القياس دوماً هي القيمة المتوقعة تماماً. ولفهم كيفية صياغة تعرّف القيمة التوقعة نضرب المثال التالي:

إذا كان لديك صندوق فيه 100 تفاحة باوزان مختلفة وكما يلي

الصنف	عدد التفاحات n_i	الوزن (غرام) w_i
1	10	120
2	22	125
3	30	127
4	18	130
5	15	135
6	5	100
المجموع	100	737

لنحسب معدل وزن التفاحة الواحدة نستخدم المعادلة التالية

$$\overline{W} = \frac{\sum_i n_i w_i}{\sum_i n_i} \qquad (3.31)$$

وهكذا يكون معل وزن التفاحة هو

$$\overline{W} = \frac{10\times120+22\times125+30\times127+18\times130+15\times135+5\times100}{10+22+30+18+15+5}$$

$$= \frac{12625}{100} = 126.25\text{g}$$

لاحظ أنه لاتوجد تفاحة واحدة وزنها بمقدار المعدل وهو 126.25 غرام. ثم لاحظ أن هذه الصيغة تقول لنا أن القيمة المتوسطة هي حصيلة ضرب الإحتمالية الجزئية لكل عينة من التفاح في وزنها. فمثلا هنالك 10% من التفاحات من العينة التي وزنها 120 غرام وهنالك 22% من العينة التي وزنها 125 غرام و30% من التي وزنها 127 غرام وهكذا.

والآن إذا ما أردنا صياغة حساب الإحتمالية والقيمة المتوقعة لنظام متصل continuous في ميكانيك الكموم على هذا المنوال نفسه نحول الجمع الى تكامل. لذا نكتب

$$< x > = \frac{\int x\rho(x)dx}{\int \rho(x)dx} \qquad (3.32)$$

حيث أن $\rho(x)$ هي الإحتمالية الجزئية للقيمة x (أو كثافة الإحتمالية) والتكامل يجري على كافة المدى لقيمة x. ومن الواضح أن المقام في الصيغة السابقة يمثل الإحتمالية الكلية. ولما كانت $\rho(x) = \psi^*(x)\psi(x)$ فإن الصياغة تصبح

$$< x > = \frac{\int x\,|\psi(x)|^2\,dx}{\int |\psi(x)|^2\,dx} \qquad (3.33)$$

وإذا كانت $\psi(x)$ دالة مقومة فإن

$$< x >= \int x |\psi(x)|^2 \, dx \tag{3.34}$$

أما لو أردنا إيجاد القيمة المتوقعة للزخم فإننا نكتب

$$< p >= \frac{\int p |\phi(p)|^2 \, dp}{\int |\phi(p)|^2 \, dp} \tag{3.35}$$

وإذا كانت دالة مقومة فإن

$$< p >= \int p |\phi(p)|^2 \, dp \tag{3.36}$$

هكذا كان يجري تعريف القيمة المتوقعة في بداية ظهور الميكانيك الموجي إلا أن التعبير الإجرائي الذي ذكرناه سابقا يمكننا من وضع صيغة أكثر عمومية للقيمة المتوقعة بدلالة الإجراء وهذه هي

$$< A >= \frac{\int \psi^*(x) \hat{A} \psi(x) dx}{\int |\psi(x)|^2 \, dx} \tag{3.37}$$

حيث في هذه الصياغة يعمل الإجراء $\hat{A}$ على الدالة $\psi(x)$ وتكون القيمة المتوقعة هي معدل ما ينتجه اشتغال $\hat{A}$ على $\psi(x)$. (مثال لهذا الحساب أنظر مسألة جسيم في صندوق في الفصل اللاحق).

معادلة الاستمرارية لدالة شرودنجر

معادلة الإستمرارية هي واحدة من أهم معادلات الفيزياء كونها تعبر بشكل أو بآخر عن معنى إنحفاظ الموجودات. وربما كانت هذه المعادلة أكثر أهمية من أي قانون إنحفاظ آخر سواء كان قانون انحفاظ الطاقة أو انحفاظ الزخم أو غيرها. لذلك من الضروري إيجاد هذه

المعادلة وتفسير معانيها وما تحويه. هنا سوف نشتق هذه المعادلة لدالة الموجة المعتمدة على الزمن في بعد واحد ومن السهل تعميمها الى ثلاثة أبعاد.

خذ كثافة الإحتمالية $|\psi(x,t)|^2$ ثم جد مشتقتها بالنسبة للزمن. نجد

$$\frac{\partial \psi^*(x,t)\psi(x,t)}{\partial t} = \psi^*(x,t)\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} + \psi(x,t)\frac{\partial \psi^*(x,t)}{\partial t}$$

لنعد إلى معادلة شرودنجر (3.21) ونأخذ القرين المعقد لها فنحصل على

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi^*(x,t)}{\partial x^2} + V\psi^*(x,t) = -i\hbar\frac{\partial \psi^*(x,t)}{\partial t} \qquad (3.38)$$

ولآن لنعوض عن مشتقة $\psi(x,t)$ ومشتقة $\psi^*(x,t)$ بالنسبة للزمن من معادلة شرودنجر وقرينها لنجد أن

$$\frac{\partial |\psi(x,t)|^2}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2im}\left(\psi^*\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \psi\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2}\right)$$

$$= -\frac{\hbar}{2im}\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi^*\frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi\frac{\partial \psi^*}{\partial x}\right)$$

أي أن

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial j(x,t)}{\partial x} \qquad (3.39)$$

حيث أن

$$j(x,t) = \frac{\hbar}{2im}\left(\psi^*\frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi\frac{\partial \psi^*}{\partial x}\right)$$

هو تيار الإحتمالية. تسمى العلاقة (3.36) أعلاه معادلة الإستمرارية Continuity Equation وتعني بمجملها أن المعدل الزمني لتغير كثافة الإحتمالية $\rho(x,t) = |\psi(x,t)|^2$ يتناسب طردياً مع التناقص في مقدار تيار الإحتمالية $j(x,t)$

يمكننا أيضاً وضع تيار الإحتمالية هذا بالصيغة

$$j(x,t)=\frac{\hbar}{m}\operatorname{Im}\left(\psi^{*}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) \tag{3.40}$$

هذه الصياغة مهمة ومنها نعلم أنه إذا كانت دالة الموجة حقيقية تماماً أي لا تحتوي على جزء خيالي فإن تيار الإحتمالية يكون صفراً.

المثال التقريبي الذي يمكن أن نقدمه لتوضيح مفهوم تيار الإحتمالية هو قنينة غاز محكومة بصمام سيطرة داخلها جزيئات الغاز تحت ضغط معين. هذه الجزيئات تمتلك كثافة احتمالية معينة تتحدد بعدد الجزيئات لوحدة الحجم أي باختصار هي الكثافة العددية للجزيئات. لكننا عندما نفتح صمام السيطرة فإن الجزيئات سوف تخرج من قنينة الغاز مؤلفة تياراً عبر الأنبوب الموصول بالقنينة وهنا نتعرف على تيار الإحتمالية الذي سيكون هو تيار جزيئات الغاز الخارجة من القنينة. ومن الواضح أن المعدل الزمني لتناقص كثافة الإحتمالية في داخل جرة الغاز متناسب طردياً مع سرعة خروج جزيئات الغاز من القنينة، أي مع إنحدار تيار الإحتمالية.

مثال: إحسب تيار الإحتمالية للدوال الموجية التالية

$$\psi_1(x)=e^{ikx}+\mathrm{R}e^{-ikx},\quad \psi_2(x)=Ae^{iqx}+Be^{-iqx}$$

$$\psi_3(x)=Fe^{-\kappa x}$$

الحل:

$$j_1(x)=\frac{\hbar}{2im}\left[\left(e^{-ikx}+R^{*}e^{ikx}\right)\left(ike^{ikx}-ik\,\mathrm{R}e^{-ikx}\right)+c.c\right]$$

$$=\frac{\hbar k}{m}\left(1-|R|^2\right)$$

وبطريقة مماثلة نجد

$$j_2(x)=\frac{\hbar k}{m}\left[|A|^2-|B|^2\right]$$

أما $j_3(x)$ فنجد أنه صفر. لماذا؟

تأثير الطور على الإحتمالية

من الضروري جدا معرفة أن ميكانيك الكموم هو نظرية خطية في بنيتها الأساسية بالتالي فإن دوال الموجة قابلة للجمع مع بعضها. أي أن مجموع أي عدد من دوال الأمواج هو دالة موجة أيضاً. وعلى هذا الأساس قام مبدأ النشر. أما الإحتماليات فلا تجمع إذ أنها لا خطية. خذ مثلاً $\psi_1(\theta)=R_1e^{i\theta_1}$ وخذ $\psi_2(\theta)=R_2e^{i\theta 2}$ لنجد أن $|\psi_1(\theta)|^2=|R_1|^2$ ونجد أن $|\psi_2(\theta)|^2=|R_2|^2$ وهذا يعني بحسب مبدأ تراكب الأمواج أنه وعلى الرغم من أن

$$\psi=\psi_1(\theta_1)+\psi_2(\theta_2)$$

لكن

$$|\psi|^2=|\left(\psi_1(\theta_1)+\psi_2(\theta_2)\right)|^2=|R_1|^2+|R_2|^2+2R_1R_2\cos(\theta_2-\theta_1)$$
$$\neq|\psi_1(\theta_1)|^2+|\psi_2(\theta_2)|^2$$

حيث نلاحظ أن الحد الأخير وهو حد التداخل بين الدالتين يميز مجموع كثافة الإحتمالية مما يجعلها لا خطية. إن هذه الخاصية هي التي تميز ميكانيك الكموم عن الميكانيك الكلاسيكي وفيها تتجلى الطبيعة الموجية بأبهى صورها.

مثال لحساب الإحتمالية والقيم المتوقعة

فيما يلي نأخذ مثالا نطبق فيه حساب الإحتمالية وما يتعلق به لدالة نموذجية.

مثال: خذ الدالة

$$\psi(x)=2\alpha\sqrt{\alpha}xe^{-\alpha x}\qquad x>0$$
$$=0\qquad x<0$$

وإحسب

(أ) النقطة التي تصبح عندها كثافة الإحتمالية $\rho(x)$ أكبر ما يمكن

(ب) القيمة المتوقعة $<x>$ و $<x^2>$.

(ج) إحسب احتمالية أن يكون الجسيم بين $x=0$ و $x=1/\alpha$.

(د) إحسب $\phi(p)$ ومنها إحسب $< p >$ و $< p^2 >$.

(هـ) إحسب مقدار اللادقة في الموقع Δx و في الزخم Δp.

الحل: (أ) إن النقطة التي تصبح عندها $\rho(x)$ قيمة عظمى هي التي تكون فيها المشتقة الأولى صفراً.

وهذه نجدها كما يلي $\frac{d}{dx}\left(x^2e^{-2\alpha x}\right) = 2x(1-\alpha x)e^{-2\alpha x} = 0$

وهذا يعني أن $x = 1/\alpha$. أما القيمة المتوقعة فنجدها كما يلي

$$< x >= \int_0^\infty \left(4\alpha^3 x^2 e^{-2\alpha x}\right) x dx = \frac{1}{4\alpha}\int y^3 e^{-y} dy = \frac{3!}{4\alpha} = \frac{3}{2\alpha}$$

كذلك

$$< x^2 >= \int_0^\infty \left(4\alpha^3 x^2 e^{-2\alpha x}\right) x^2 dx = \frac{4!}{8\alpha^2} = \frac{3}{\alpha^2}$$

(ج) حساب الإحتمالية

$$P = \int_0^{1/\alpha} 4\alpha^3 x^2 e^{-2\alpha x} dx$$

(د) القيمة المتوقعة للزخم يمكننا أن نجدها من

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_0^\infty \left(2\alpha\sqrt{\alpha}\, x e^{-\alpha x}\right) e^{-ipx/\hbar} dx = -\sqrt{\frac{4\alpha^3}{2\pi\hbar}}\frac{1}{(\alpha + ip/\hbar)}$$

ومن هذا نحسب

$$< p >= \int_{-\infty}^\infty p\,|\phi(p)|^2\, dp = \frac{4\alpha^3}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^\infty \frac{pdp}{\left(\alpha^2 + p^2/\hbar^2\right)^2} = 0$$

$$< p^2 >= \frac{4\alpha^3}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^\infty \frac{p^2dp}{\left(\alpha^2 + p^2/\hbar^2\right)^2} = \frac{8\alpha^3}{2\pi\hbar}\int_0^\infty \frac{p^2dp}{\left(\alpha^2 + p^2/\hbar^2\right)^2} = \alpha^2\hbar^2$$

ويمكننا حساب القيمة المتوقعة للزخم بطريقة أخرى باستخدام الصيغة

$$< A >= \frac{\int \psi^*(x) \hat{A} \psi(x) dx}{\int |\psi(x)|^2 \, dx}$$

وبما أن الدالة مقومة فإن

$$< p >= \int_0^\infty \psi^*(x) \left(-i\hbar \frac{d}{dx} \right) \psi(x) dx = 0$$

وكذلك نحسب

$$< p^2 >= \int_0^\infty \psi^*(x) \left(-\hbar \frac{d^2}{dx^2} \right) \psi(x) dx = \alpha^2 \hbar^2$$

(هـ) حساب اللادقة

$$\left(\Delta x^2\right) = < x^2 > - < x >^2 = \frac{3}{\alpha^2} - \frac{9}{4\alpha^2} = \frac{3}{4\alpha^2}$$

$$\left(\Delta p^2\right) = < p^2 > - < p >^2 = \alpha^2 \hbar^2$$

كذلك فإن $\Delta x \Delta p = \sqrt{\frac{3}{4}} \hbar$ وهذا يحقق شروط مبدأ اللادقة.

أسئلة مفاهيمية للفصل الثالث

1. ما هي دالة الموجة. وماذا تعني؟
2. ماهي إحتمالية وجود الجسيم في النطاق المحصور بين x و $x+dx$ وماهي الإحتمالية الكلية لوجوده في الفترة $x=a$ الى $x=b$؟
3. ماذا يعني أن نقول أن الإلكترون ممتد نظرياً خارج حدود حجمه؟
4. ماذا يقابل مفهوم كثافة الإحتمالية في النظرية الكهرمغناطيسية؟

5. ما هو سبب الطبيعة الإحتمالية للكميات الفيزيائية؟
6. ماذا تمثل معادلة شرودنجر؟ أكتب معادلة شرودنجر غير المعتمدة على الزمن ومعادلته المعتمدة على الزمن.
7. ما هي النظم التي تنطبق عليها معادلة شرودنجر غير المعتمدة على الزمن؟
8. هل تنطبق معادلة شرودنجر على النظم النسبوية ولماذا؟
9. ما هو مضمون معادلة الإستمرارية لدالة الموجة؟ أية كمية تنحفظ؟
10. ما معنى أن يكون تيار الإحتمالية صفراً؟ ومتى يمكن أن يحصل ذلك كحالة عامة؟
11. ما معنى دالة الموجة في فضاء الزخم ولماذا نتعامل معها؟
12. ما دالة الموجة في فضاء الإحداثيات؟ وما علاقتها مع دالة الموجة في فضاء الزخم؟
13. ما مضمون نشر دالة الموجة بدلالة دوال أساسية Basis functions؟
14. وضِّح لماذا لايمكننا جمع الإحتماليات المنسوبة الى دوال الموجة على حين أننا نعرف إمكانية جمع تلك الدوال لتكوين حالة جديدة.
15. ما الملحوظ الفيزيائي Physical Observable؟
16. ما المقصود بالقيمة المتوقعة للملحوظ الفيزيائي وكيف نجدها؟
17. إعط مثالاً قابلاً للتطبيق عمليا لإيجاد القيمة المتوقعة لأي ملحوظ فيزيائي؟
18. هل نحصل بالضرورة على القيمة المتوقعة في حالة وجود عدد محدود من الحالات؟
19. متى تكون نحصل على القيمة المتوقعة في أي عملية قياس؟
20. لماذا تكون القياسات الكمية غير حتمية Indeterministic؟

مسائل الفصل الثالث

س1) أي من هذه الدوال تمثل حالة نظام فيزيائي؟ (على فرض تغطيتها كامل الفضاء).

$f(x) = 3\sin \pi x, \quad g(x) = 4 - |x|, \quad h(x) = \sqrt{5x}, \quad e(x) = x^2$

س2) وضّح أنه على الرغم من أن دوال الموجة يمكن أن تُجمع فإن كثافة الإحتماليات التي تقابلها لا تُجمع.

س3) إذا كانت دالة الموجة التالية نافذة ضمن المدى $0 \le x \le a$

$$\psi(x,0) = \frac{A}{\sqrt{a}}\sin\frac{\pi x}{a} + \sqrt{\frac{3}{5a}}\sin\left(\frac{3\pi x}{a}\right) + \frac{1}{\sqrt{5a}}\sin\left(\frac{5\pi x}{a}\right)$$

(أ) أوجد الثابت A بحيث تكون دالة الموجة مقومة.

(ب) ما الحالات التي يمكن أن يكون عليها النظام وما إحتمالا كل منها على فرض أن الدوال الأسسية للحالات هي $u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$

(ج) إذا تم قياس الطاقة فما هي القيم التي سنجدها وما الإحتماليات؟

(د) أوجد دالة الموجة المعتمدة على الزمن.

س4) لديك الدالة

$$\psi(x) = A\left(1 - \frac{x}{a}\right) \qquad 0<x< a/2.$$

إحسب قيمة الثابت A لكي تصبح الدالة مقومة

س5) (أ) إحسب القيمة المتوقعة للموقع $<x>$ للدالة

$$\psi(x) = (\alpha/\pi)^{1/4}\exp(-\alpha x^2/2)$$

إحسب $\phi(p)$ ومنها إحسب $<p^n>$.

س6) إحسب تيار الإحتمالية للدوال التالية (حيث A ثابت معقد).

$$\psi_1(x) = Ae^{ipxl\hbar} + Be^{-ipx/\hbar}$$
$$\psi_2(x) = R(x)e^{iS(x)/\hbar}$$

س7) إذا كانت $\psi(x) = a(x) + ib(x)$ حيث a و b حقيقية

برهن أن $j(x)=\frac{\hbar}{m}\,\mathrm{Im}\left(b(x)\frac{\partial a(x)}{\partial x}-a(x)\frac{\partial b(x)}{\partial x}\right)$.

س8) إستعمل العلاقة الناتجة في السؤال السابق لحساب تيار الاحتمالية للدالة الموجية $\psi(x,t)=Ae^{ikx}$ حيث A ثابت حقيقي.

س9) لديك دالة الموجة

$$\psi(x)=x^2e^{-\alpha x} \quad x>0$$
$$=0 \quad x<0$$

(أ) إحسب النقطة التي تكون عندها كثافة الإحتمالية أعظم ما يمكن.

(ب) القيمة المتوقعة لمربع الموقع $<x^2>$

الفصل الرابع

حلول معادلة شرودنجر في بعد واحد

قلنا آنفا أن معادلة شرودنجر هي المعادلة الأساسية في ميكانيك الكموم غير النسبوي وهي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية في المكان ومعادلة تفاضلية من الدرجة الأولى في الزمن. وفي صياغة أخرى يمكن أن يكون الزمن منفصلا عن المكان ولا يظهر إلا كمعامل طوري فقط كما بيّنا سابقا فنحصل على معادلة شرودنجر غير المعتمدة على الزمن. وفي هذا الفصل المهم سنقوم بحل معادلة شرودنجر غير المعتمدة على الزمن لعدد من النظم الكمومية البسيطة مقتصرين على المعالجة في بعد واحد فقط تبسيطاً للحسابات ومن أجل تحقيق فهم أعمق للمفاهيم والطريقة.

إن الطريقة العامة لمعالجة المسائل الكمومية تتضمن الخطوات التالية:

1. تحديد الجهد في المسألة ووصفه رياضيا وهندسياً.
2. تركيب معادلة شرودنجر التفاضلية للأنطقة المختلفة في المسألة.
3. حل معادلات شرودنجر للأنطقة المختلفة حلا عاماً.
4. تطبيق الشروط الحدودية على الحلول لاستخراج علاقات جبرية فيما بينها ومن ثم حساب تلك المجاهيل التي هي في الغالب ثوابت التكاملات التي يتطلبها حل المعادلات التفاضلية.

وهكذا يتم تحصيل دوال الموجة وحساب الطاقات المسموحة في النظام قيد الدراسة. أما القيم المتوقعة للزخوم أو المواقع فإنها يمكن أن تستحصل من دوال الموجة بموجب معادلة حساب القيم المتوقعة لأي كمية مطلوبة. وبهذا يتم استخلاص المعلومات الكاملة عن النظام.

المسألة الأولى: جسيم محصور في صندوق ذي بعد واحد

ربما يكون هذا المثال هو الأكثر أساسية في ميكانيك الكموم. نفترض جسسيما ذي كتلة m محصور في صندوق ذي جدران صلبة لا يتمكن من اختراقها أبداً. لكنه قابل للحركة ضمن الفضاء داخل الصندوق. لذلك نعتبر هذا الجسم طليقا داخل الصندوق.

فيزيائيا تعترضنا هذه المسألة عندما ندرس حالات الإلكترون الحر في داخل بلورة إذ تمثل جدرانها جهداً لا نهائيا للإلكترون ذي الطاقة القليلة. ويفيدنا حل المسألة في فهم مستويات طاقة الإلكترون في داخل البلورات. ومثل هذه البلورات موجودة في جيوبكم أو حقائبكم فإن أجهزة الهواتف الخلوية لا تعمل بدونها.

لكننا يمكن أن نبسط المسألة ونعالجها في بعد واحد بدلا من ثلاثة أبعاد وعندئذ يمكننا فهم متغيرات المسألة وحساباتها دون مزيد من التعقيدات الرياضية في حالة الأبعاد الثلاثة.

رياضيا ولأغراض صياغة معادلة شرودنجر نحتاج إلى تعريف الجهد الذي يحتويه النظام وهاهنا يكون هذا الجهد صفرا داخل الصندوق ولانهائيا خارجه إذ أن المناطق خارج الصندوق ممنوعة على الجسيم فلا يتواجد فيها. وفي هذه الحالة يكون الجهد هو

$$\begin{aligned} V &= \infty && x \le 0 \\ V &= 0 && 0 < x < L \\ V &= \infty && x \ge L \end{aligned} \tag{4.1}$$

لذلك نفترض وجود جسيم حر كتلته m حركته فقط متاحة ضمن المدى 0 إلى L على المحور x ويمكن أن نكتب معادلة شرودنجر كما يلي

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = E\psi(x)$$

وهذه المعادلة يمكن إعادة كتابتها كما يلي

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+k^2\psi(x)=0 \qquad (4.2)$$

حيث أن

$$k^2=\frac{2mE}{\hbar^2} \qquad (4.3)$$

وإن E هي الطاقة الكلية للجسيم، وهي هنا في داخل الصندوق الطاقة الحركية إذ لا يوجد جهد أو مصدر قوة.

ولما كانت فرصة وجود الجسيم خارج الصندوق هي صفر فإن الشروط الحدودية تكون كما يلي

$$\psi(0)=0, \qquad \psi(L)=0 \qquad (4.4)$$

إن حل المعادلة التفاضلية (4.2) يمكن أن يكون $\psi(x)=A\sin kx$ أو يكون $\psi(x)=B\cos kx$ فكلاهما يحقق المعادلة (4.2) حيث أن A و B هي ثوابت. لذلك نقول أن الحل العام للمعادلة هو

$$\psi(x)=A\sin kx+B\cos kx \qquad (4.5)$$

والآن نطبق الشروط الحدودية على هذا الحل العام لكي نحدد المسألة ونضعها في إطارها الفيزيائي فيكون الحل

$$\psi(x=0)=0=A\sin 0+B\cos 0$$

وهذا يعني أن $B=0$ حكماً بموجب هذا الشرط الحدودي. بالتالي فإن الحل الأصح هو

$$\psi(x)=A\sin kx \qquad (4.6)$$

وعند تطبيق الشرط الحدودي الثاني عند $x=L$ فإننا نجد أن

$$\psi(x=L)=0=A\sin kL$$

لكننا الآن لا نستطيع أن نفترض أن الثابت A يمكن أن يكون صفرا لأننا بذلك نقضي على المسألة. لذلك فإن من الضروري أن يكون لدينا

$$\sin kL = 0$$

وهذا يعني أن

$$kL = n\pi, \qquad n = 1,2,3,.... \tag{4.7}$$

أي أن

$$k = \frac{n\pi}{L} \tag{4.8}$$

وبالتالي تكون دوال الموجة هي

$$\psi(x) = A\sin\frac{n\pi x}{L} \tag{4.9}$$

وبالاستعانة بالتعريف (4.3) فإن هذا يعني أن

$$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2} \tag{4.10}$$

بهذه النتيجة المهمة نكون قد عَرَفنا مستويات الطاقة الممكنة للجسيم. وكما نرى من هذه النتيجة فإن الطاقة موجبة دوماً وأن هنالك قدراً أدنى لطاقة الجسيم في الصندوق هي E_1 وهي ليست صفراً (وهو ما يسمى الحالة الدنيا Ground State Energy) وهذه النتيجة مخالفة تماما لما نتوقعه عندما نعتمد الرؤية الكلاسيكية للمسألة إذ ينبغي أن يكون الحد الأدنى للطاقة صفراً لأن الجسيم لا يمتلك أصلاً أي قدر من الطاقة.

إن مقدار طاقة الجسيم يتناسب عكسياً مع كتلته وعكسياً مع مربع بُعد الصندوق. بالتالي فإن مقدار الطاقة الدنيا يتضاءل عندما يكون حجم الصندوق كبيراً وكتلته كبيرة. وهنا نفهم أن الطاقة الدنيا ناتجة أساساً عن الحدود التي تفرضها جدران الصندوق.

من الواضح أن كون قيمة ثابت بلانك صغيرة جداً يجعل الحالة الكمومية للجسيم تظهر بوضوح فقط في نطاق العالم المجهري Microscopic على حين أن هذا التأثير الكمومي يتلاشى في النظم الجهرية Macroscopic.

تقويم دالة الموجة

إن دالة الموجة في (4.9) غير مقومة ويقتضي تقويمها لكي تكون الإحتمالية الكلية لوجود الجسيم في أي مكان في الصندوق هي واحد صحيح أو 100%. ولهذا الغرض نكتب

$$\int_0^L \psi^*(x)\psi(x)dx = \int_0^L |A|^2 \sin^2 \frac{n\pi x}{L}dx = \int_0^L \frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{2n\pi x}{L}\right)dx = 1$$

وبالتالي نحصل على

$$A = \sqrt{\frac{2}{L}} \qquad (4.11)$$

بالتالي فإن دالة الموجة المقومة التي تصف جسيماً في صندوق ذي بعد واحد مداه L تكون

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad (4.12)$$

هذه هي صيغة دوال الموجة للحالات الممكنة لجسيم في صندوق ذي بعد واحد.

مضامين دالة الموجة

دعنا الآن ندرس هذه الدوال التي تمثل الجسيم في الصندوق. لدينا

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

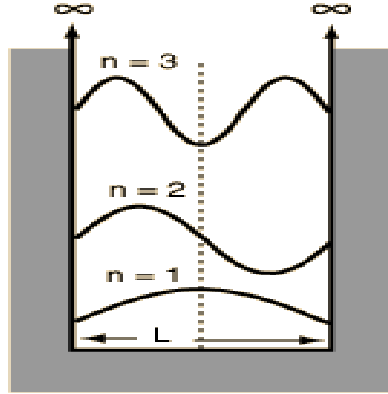
أبتداءً نلاحظ أن دالة الموجة لا تحتوي على كتلة الجسيم بشكل ظاهر وصريح بالتالي فهي تصف أي جسيم يمكن أن يوجد في الصندوق مهما كانت كتلته. وهذه مفارقة سببها التمثيل الموجي للجسيم فنحن هنا في هذه المسألة منحنا الجسيم وصفا موجياً من خلال

معادلة شرودنجر. لكن في حقيقة الأمر فإن الصفة الجسيمية مختفية داخل الكمية $k=\frac{n\pi}{L}$ فهذا هو صورة أخرى لزخم الجسيم الذي هو $p_n=\hbar k=n\pi\hbar/L$ أي يمكننا إظهار الطابع الجسيمي للمسألة إذا كتبنا

$$\psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{p_n x}{\hbar}\right) \tag{4.13}$$

وبهذا تكون كتلة الجسيم حاصلة ضمنياً داخل الزخم p_n . من جانب آخر فإننا نجد في الصيغة (4.13) أن للجسيم ليس دالة موجة واحدة بل عدة دوال موجية ممكنة وهي الحالات التي يمكن أن يكون عليها الجسيم تتفاوت إحداها عن الأخرى بمقدار قيمة n بمعنى أن هنالك أنماط موجية وليس موجة واحدة. وهذه الأنماط الموجية تمثل الأحوال الممكنة للجسيم الذي يمتلك طاقات مختلفة أو لمجموعة جسيمات لها طاقات مختلفة. فكل نمط من الأنماط يعبر عن مستوى من مستويات الطاقة.

وهذه الحالات (الأنماط) المختلفة لدالة الموجة هي كما مبينة بالرسم التالي



الشكل (4–1) جسيم في صندوق

ومنها نستطيع أيضا أن نرسم كثافة الإحتمالية للمستويات المختلفة للجسيم وهذا مبين في الرسم التالي.



الشكل (4–2) إحتماليات الجسيم في صندوق

وعند تحليل هذا الرسم نجد أن هنالك أماكن معينة مسموح أن يوجد عندها الجسيم (وليست كل الأماكن مسموحة) وأخرى غير مسموحة. كما أن هنالك مناطق هي الأكثر إحتمالاً ليتواجد فيها الجسيم. وهذه الصفة هي صفة غير كلاسيكية أيضاً. مثلا في المستوى الأول يمكن أن يتواجد الجسيم في أي موقع على مدى عرض الصندوق كله لكن الإحتمالية العظمى تكون في منتصف الصندوق على حين تتضائل هذه الإحتمالية في الأطراف. أما في المستوى الثاني للطاقة فإن الجسيم لا يمكن أن يتواجد في منتصف الصندوق لأن إحتمالية وجوده هنالك هي صفر. على حين أن الاحتمالية العظمى هي وجود الجسيم عند نهاية الربع الأول من الصندوق أو عند نهاية الربع الثالث. وهكذا يظهر لنا أن البنية التحتية لفيزياء العالم تختلف عن ما يظهر لنا على سطحه الخارجي.

تعامد دوال الموجة Orthogonality

لكننا في أي لحظة من الزمن لن نجده إلا في حالة واحدة من تلك الأحوال وذلك لأن دوال الموجة المختلفة الأطوار متعامدة Orthogonal على بعضها. وهذا ما يمكن إثباته كما يلي

$$\begin{aligned}\int_0^L \psi_m(x)\psi_n(x)dx &= \frac{2}{L}\int_0^L \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \\ &= \frac{1}{L}\int_0^L \left[\cos\frac{(m-n)\pi x}{L} - \cos\frac{(m+n)\pi x}{L}\right]dx \\ &= \frac{\sin(m-n)\pi}{(m-n)\pi} - \frac{\sin(m+n)\pi}{(m+n)\pi} \\ &= 0 \quad if\ m \neq n \\ &= 1 \quad if\ m = n\end{aligned}$$

وهكذا يمكن أن نكتب بصورة عامة

$$\int_0^L \psi_m(x)\psi_n(x)dx = \delta_{mn} \tag{4.14}$$

لكن إذا ما وجدت عدة جسيمات في الصندوق في آن واحد فإن كلاً منها يمكن أن يوجد على حالة من الحالات الممكنة وبهذا تكون هنالك توزيعات مختلفة واسعة للمواقع والطاقات المسموحة للجسيمات في الصندوق.

دورية دوال الموجة وتكميم الطاقة

من المؤكد أن دوال الموجة للجسيم المحصور في صندوق دورية بمدى بعد الصندوق L أو أي جزء عدد منه . وهذا هو شرط حدودي ويعني أن

$$\psi(x+L) = \psi(x)$$

والآن لو أعتمدنا صيغة الحل الأكثر عمومية لدوال الموجة في المعادلة (4.2) وهو $\psi(x) \sim e^{ikx}$ فإن الدورية تعني أن $e^{ik(x+L)} = e^{ikx}$ وهذا يعني أن $e^{ikL} = 1$ بمعنى أن

$$\cos kL + i\sin kL = 1$$

وبما أن الطرف الأيمن حقيقي فأن الجزء الخيالي من الطرف الأيسر يساوي صفر، أي $\sin kL = 0$ وهذا بالضرورة يقتضي أن يكون $kL = n\pi$ حيث n عدد صحيح. وبموجب تعريف k في المعادلة (4.8) فإن

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$$

وهذه النتيجة تؤكد أن طاقة الجسيم مكممة.

القيم المتوقعة

تأكيداً لما سبق من الصفات الغريبة لتصرف الجسيم المحصور في صندوق ذي بعد واحد، يمكننا حساب القيمة المتوقعة لموقع الجسيم. دعنا نحسب ذلك للحالة الدنيا أي $n=1$

$$\begin{aligned} < x > &= \frac{2}{L}\int_0^L \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) x \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx \\ &= \frac{2}{L}\int_0^L \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) x dx \qquad (4.15) \\ &= \frac{1}{L}\int_0^L \left(1 - \cos\frac{2\pi x}{L}\right) x dx = \frac{1}{L}\left(\frac{x^2}{2}\right)_0^L = \frac{L}{2} \end{aligned}$$

أي أن القيمة المتوقعة لموضع الجسيم ذي طاقة بالحد الأدنى هو وسط الصندوق.

أما إذا أردنا حساب القيمة المتوقعة لمواضع الجسيم ذي الطاقات الأعلى فيجب أن نلاحظ مدى الدالة على x ففي حالة الطاقة المثارة الأولى $n=2$ مثلا تكون الدالة منفصلة وهي مؤلفة من جزئين، الأول مداه من 0 إلى $L/2$ والآخر مداه من $L/2$ إلى L. ولذلك فإننا نحسب القيمة المتوقعة على المديين بشكل منفصل لنجد أن $<x>$ في المدى الأول مقدارها $L/4$ على حين أن $<x>$ في المدى الثاني قيمتها $3L/4$. وهكذا الأمر لبقية المستويات نكتب دالة الموجة ونعرف نقاط أصفارها أولا ثم نجري الحسابات لكل مدى لوحده.

دعنا الأن نحسب القيمة المتوقعة للزخم. وهذه ستكون

$$
\begin{aligned}
< p > &= \frac{2}{L}\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \\
&= \frac{2}{L}\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\left(-\frac{in\pi\hbar}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = 0
\end{aligned}
\tag{4.16}
$$

أي أن معدل قيمة الزخم هي صفر. ولكن دعنا أيضا نحسب القيمة المتوقعة لمربع الزخم

$$
\begin{aligned}
< p^2 > &= \frac{2}{L}\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \\
&= \frac{2}{L}\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\left(-\frac{in\pi\hbar}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{L^2}
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

أي أن معدل قيمة مربع الزخم ليست صفراً مما يعني أن الزخم ليس صفراً لكن لما كان المعدل هو صفر علمنا أن ذلك يعني أن إحتمالية حركة الجسيم نحو اليمين هي نفس إحتمالية الجسيم نحو الشمال. وبالتالي فإن الجسيم المحصور في صندوق لا يسكن أبداً بل هو دائم الحركة بما يمتلك من طاقة صفرية. وهذا كشف مهم لميكانيك الكموم يختلف فيه عن التصور الكلاسيكي الذي يقضي أن يكون الجسيم المتروك داخل صندوق مقفل ساكنا إلى الأبد.

على أية حال فإن النتيجة (4.16) متوافقة تماما مع حساب طاقة الجسيم في الصندوق لأن

$$
E_n = \frac{< p^2 >}{2m} = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2} \tag{4.18}
$$

تفسير الإحتماليات

كيف يمكن أن نفهم هذه الحالة من أن جسيماً في صندوق سيتخذ لمكانه مواقع معينة لا يتواجد في غيرها؟ ولماذا تأخذ طاقته كميات مقننة مكممة؟

إن حالة الجسيم داخل الصندوق تمثلها دالة جيبية بسيطة كما شاهدنا وهذه الموجة إذ تكون محصورة بين جدارين فإنها ستشكل موجة واقفة تتداخل مع نفسها فإن كانت نصف موجة (وهو الحالة الدنيا) فإنها ستشكل بطنا وعقدتين وإن كانت موجة كاملة فإنها ستشكل بطنين وثلاث عقد وهكذا فإن عدد العقد هو $n+1$. هذا هو التفسير الهندسي الرياضي للنتيجة وهو التفسير الأول.

لكننا يمكن أن نفهم المسألة فيزيائيا حين نضع في الصندوق 1000 جسيم مثلا. حينئذ سنرى الجسيمات التي تمتلك طاقة بالحد الأدنى تتوزع توزعا طبيعيا Normal Distribution بحيث تكون غالبيتها في وسط الصندوق بينما تكون أعداد قليلة منها متناثرة هنا وهناك في فضاء الصندوق. أما الجسيمات التي تمتلك طاقة مثارة بالمستوى الأول first excited state فإن غالبيتها تتواجد في منتصف النصف الأول من الصندوق وفي منتصف النصف الثاني من الصندوق. على حين لا نجد أيا من هذه الجسيمات في منتصف الصندوق بالضبط. وهكذا لبقية الجسيمات التي سوف تتوزع بحسب مستوى طاقاتها. من الجميل أن يكون لدينا في حالة جسيمات متعددة غير متفاعلة مع بعضها non-interacting هذا التصنيف الطبيعي للطاقات.

طيب ماذا لو كان لدينا جسيم واحد فقط في الصندوق كيف سيتصرف؟

هنا نأتي للتفسير الثالث وهذا التفسير يعتمد على فرضية القول بأن الجسيم الواحد يتقلب في الأحوال المسموحة له ويتواجد في الأماكن المسموحة له بالإحتماليات المقررة لتلك الأماكن والأحوال وذلك بناء على فرضية تقول بتجدد خلق الأشياء بمعدل سريع جداً. فمن خلال حسابنا للزخم وجدنا أن القيمة المتوقعة للزخم هي صفر. وكما قلنا فإن هذا لا يعني أن الجسم سيكون ساكنا لأننا وجدنا أيضا أن القيمة المتوقعة لمربع الزخم هي ليست صفراً. بالتالي قلنا أن الجسم يتحرك يمنة ويسرة. وهذا يسمح له أن يتواجد في أي

مكان في الصندوق باحتماليات مختلفة، أي في حالاته التي يكون عليها، ولكن لأزمنة مختلفة. فلا يتواجد الجسيم ذي الطاقة الدنيا في أطراف الصندوق إلا لزمن قصير جداً بينما يقضي معظم وقته في وسط الصندوق. أما الجسيم الذي يمتلك طاقة الحالة المثارة الأولى ($n = 2$) فإنه يتواجد لمعظم وقته في موقعين أحدهما عند منتصف النصف الأول من الصندوق والثاني عند منتصف النصف الثاني من الصندوق ويقضي هذا الجسيم قليلا من الوقت في المناطق الأخرى. وهكذا دواليك بشأن مستويات الطاقة الأخرى.

الطاقة الصفرية

نلاحظ أن الطاقة الصغرى للجسيم المحصور في صندوق لا تكون صفراً بل هي كمية محدودة تسمى الطاقة الصفرية Zero-point Energy ومقدارها هو

$$E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} \tag{4.19}$$

وهذا مخالف للتصور الكلاسيكي الذي يقرر أن تكون طاقة الجسيم صفراً. ولكن لماذا لا تكون طاقة الجسيم، المحصور ضمن نطاق مكاني معين، صفراً؟ والجواب يكمن في مضمون مبدأ اللادقة حيث أنه إذا كانت $0 < x < L$ فإن $\Delta x \approx L/2$ وطبقا لمبدأ اللادقة فإن مقدار اللادقة في الزخم سيكون $\Delta p \approx \hbar / 2\Delta x = \hbar / L$ مما يعني أن الطاقة الحركية للجسيم الذي كتلته m ستكون

$$E = \frac{(\Delta p)^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2mL^2} \tag{4.20}$$

هذه النتيجة مقاربة للطاقة الدنيا (الصفرية) للجسيم في صندوق. وهكذا يبدو فعلا أن مبدأ اللادقة هو المسؤول عن نشأة الطاقة الدنيا. فلو أن الصندوق كان كبيرا لتضاءلت

الطاقة الدنيا حتى تصير صفراً عندما يكون بعد الصندوق لا نهائياً أي لا وجود للجدران. لكن هذا سيعني أن الجسيم منتشر في مكان لا نهائي وبهذا يكون فاقداً للتحيّز، أي لا يمكن أن نحدد موقعه، تماماً non-localized.

نشر دالة الموجة لجسيم في صندوق

يمكننا إعتبار دوال الموجة المسموحة لجسيم في صندوق كأسس يتم عليها نشر دالة أي موجة أخرى وحساب إحتماليات كون الجسيم في أي من تلك الحالات التي تمثلها تلك الأسس التي نشرت عليها الدالة العامة للجسيم أو مجموعة الجسيمات المتماثلة. والمثال التالي يوضح مجمل هذه العمليات.

مثال: إذا كانت دالة الموجة لجسيم في صندوق عرضه a هي

$$\begin{aligned} \psi(x) &= A(x/L) \qquad 0 < x < L/2 \\ &= A(1 - x/L) \qquad L/2 < x < L \end{aligned}$$

فاحسب ثابت التقويم A أولا ثم إحسب إحتمالية أن يكون قياس الطاقة يعطي النتيجة E_n

الحل: لحساب ثابت التقويم نضع

$$\int_0^a \psi^*(x)\psi(x)dx = \int_0^{a/2} |A|^2 \left(\frac{x}{L}\right)^2 dx + \int_{L/2}^{L} |A|^2 \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 dx = 1$$

لنجد أن $A = \sqrt{\frac{12}{L}}$. والآن لدينا المفكوك

$$\psi(x) = \sum_n a_n u_n(x)$$

حيث أن

$$a_n = \int_0^a u_n(x)\psi(x)dx$$

وحيث أن

$$u_n(x)=\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

لذا فإن

$$a_n=\frac{\sqrt{24}}{L}\left[\int_0^{a/2}\left(\frac{x}{L}\right)\sin\frac{n\pi x}{L}dx+\int_{L/2}^{L}\left(1-\frac{x}{L}\right)\sin\frac{n\pi x}{L}dx\right]$$

وإذا ما بدلنا المتغير في التكامل الأول ليكون $x\pi/L=y$ وفي التكامل الثاني ليكون $x\pi/L=\pi-y$ فإننا نحصل على النتيجة:

$$a_n=\frac{\sqrt{24}}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{y}{\pi}\sin ny(1-(-1)^n)dy$$

فإن كانت n زوجية صار التكامل صفراً. أما إذا كانت n فردية فالنتيجة هي

$$a_n=\frac{2\sqrt{24}}{\pi^2 n^2}(-1)^{n+1}$$

وهذا يعني أن $|a_n|^2=\frac{96}{\pi^4 n^4}$ وهذا هو مقدار إحتمالية أن نجد الجسيم في الحالة n.

لاحظ أن مجموع الإحتماليات يساوي 1.

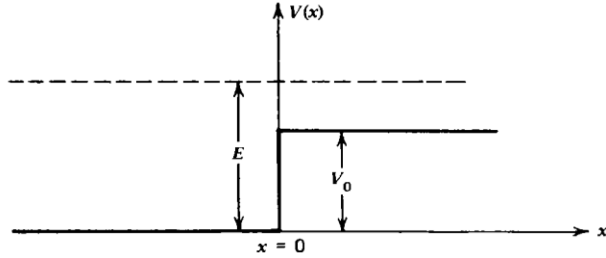
المسألة الثانية: العتبة الجهدية Step Potential

وتسمى هذه أيضا مسألة الجهد الدرجي. في هذه المسألة لدينا عتبة جهد وهي أشبه بحاجز محدود المقاومة لكنه ذي امتداد مكاني غير محدود. مثلاً تل كبير من الرمل، أو بركة ماء عميقة، فإن سقط حجر رأسيا في بركة ماء فإن سيلاقي ممانعة حال دخوله الى الماء، هذه الممانعة هي قوة وبالتالي فهي جهد مفاجئ يواجه الحجر الساقط في الماء. لذلك تكون بركة الماء العميقة أشبه بالعتبة الجهدية.

قبل الحاجز الجهدي تكون الجسيمات حرة لا تأثير عليها، ولكن عند دخولها الى منطقة الجهد تتغير أحوالها طبقاً لتأثيرات الجهد. رياضيا يُمثّل الجهد بما يلي

$$\begin{aligned} V(x) &= 0 \quad x < 0 \\ &= V_0 \quad x \geq 0 \end{aligned} \tag{4.21}$$

وبالرسم تكون العتبة الجهدية في بعد واحد كما يلي



الشكل (4-3) العتبة الجهدية

الجهد هنا موجب وهو يقاوم اختراق الجسيمات له. وطبقا لهذا يكون لدينا منطقتين الأولى قبل العتبة والثانية بعدها. ومعادلة شرودنجر للمنطقة الأولى هي

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_I(x)}{dx^2} = E\psi_I(x)$$

وهذه يمكن كتابتها كما يلي

$$\frac{d^2\psi_I(x)}{dx^2} + k_1^2\psi_I(x) = 0 \tag{4.22}$$

حيث أن

$$k_1 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \tag{4.23}$$

لاحظ أن k_1 هو زخم الجسيمات قبل دخولها العتبة الجهدية.

أما المنطقة الثانية ففيها معادلة شرودنجر كما يلي

$$\frac{d^2\psi_{II}(x)}{dx^2}+k_2{}^2\psi_{II}(x)=0 \tag{4.24}$$

حيث أن

$$k_2=\sqrt{\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}} \tag{4.25}$$

لاحظ أن k_2 هو زخم الجسيمات النافذة داخل العتبة الجهدية.

الحلول العامة للمعادلة (4.22) يمكن كتابتها كما يلي

$$\psi_I(x)=e^{ik_1x}+\mathrm{Re}^{-ik_1x} \tag{4.26}$$

حيث أن هذا الحل يمثل جسيمات قادمة من اليسار الى اليمين وجسيمات مرتدة عن الحاجز تتحرك من اليمين الى اليسار. وقد إعتبرنا دالة الجسيمات القادمة مقومة لتسهيل الأمر. ويمثل R سعة دالة الموجة للجسيمات المرتدة أي أن $|R|^2$ تمثل الكثافة (أو الشدة) النسبية للجسيمات المرتدة.

أما المعادلة (4.24) فإن حلها العام هو

$$\psi_{II}(x)=Te^{ik_2x}+De^{-ik_2x} \tag{4.27}$$

لكننا نستطيع القول أن المعامل D يجب أن يكون صفراً بالبداهة لأن الجسيمات التي دخلت الحاجز لم تجد شيئا ترتد عنه. لذلك يكون الحل المعقول هو

$$\psi_{II}(x)=Te^{ik_2x} \tag{4.28}$$

حيث تمثل T هنا سعة دالة الموجة في النطاق داخل الحاجز الجهدي.

الشروط الحدودية

تعد الشروط الحدودية من أهم الخطوات اللازمة لفرض الشروط الفيزيائية على المسألة. وهنا نعرف أن الجسيمات الداخلة الى الحاجز الجهدي مستمرة ولا تتعرض الى قطع، بالتالي فإن من المعقول أن صفة الإستمرارية تتحقق مع دالة الموجة قبل دخولها الى المنطقة الجهدية وبعدها. ولذا يكون لدينا

$$\psi_I(0) = \psi_{II}(0) \tag{4.29}$$

وعند التعويض من المعادلتين (4.26) و(4.27) فإننا نحصل على

$$1 + R = T \tag{4.30}$$

أما الشرط الحدودي الثاني فيقضي بإستمرارية المشتقة الأولى على جهتي الحاجز أي

$$\left(\frac{\partial \psi_I}{\partial x}\right)_{x=0} = \left(\frac{\partial \psi_{II}}{\partial x}\right)_{x=0} \tag{4.31}$$

وهذا يعطينا

$$ik_1(1 - R) = ik_2 T \tag{4.32}$$

من المعادلتين (4.30) و (4.32) نحصل على

$$R = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}, \quad T = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} \tag{4.33}$$

وإذا ما عرّفنا المعامل

$$\mu = \frac{k_2}{k_1} = \sqrt{1 - \frac{V_0}{E}} \tag{4.34}$$

فإننا يمكن أن نكتب معامل الإنعكاس Reflection Coefficient كما يلي

$$R = \left(\frac{1 - \mu}{1 + \mu}\right) \tag{4.35}$$

وبالتالي فإن الشدة النسبية الجسيمات المنعكسة هي

$$|R|^2 = \left(\frac{1-\mu}{1+\mu}\right)^2$$

ونكتب معامل النفاذ Transmission Coefficient كما يلي

$$T = \frac{2}{1+\mu} \tag{4.36}$$

تكون الشدة النسبية الجسيمات النافذة الى داخل العتبة الجهدية هي

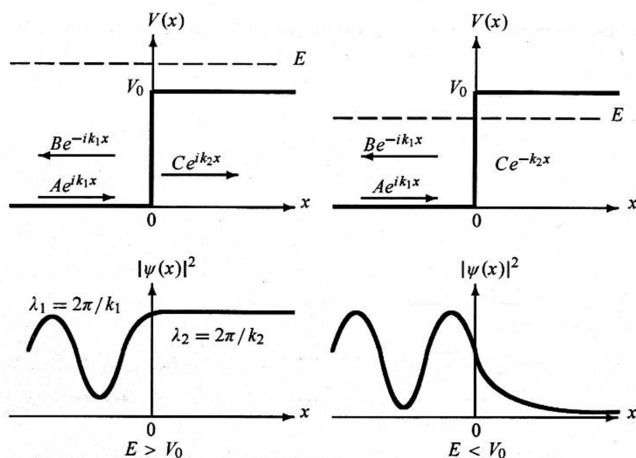
$$|T|^2 = \left(\frac{2}{1+\mu}\right)^2$$

تحليل ومناقشة النتائج

هاهنا نحن أمام مسألة فيزيائية كمومية مهمة تكشف لنا عن صفات جديدة غير كلاسيكية علينا أن نفهمها ونفهم أسبابها. وهذه هي: حتى ولو كانت الطاقة الحركية للجسيمات الساقطة على العتبة الجهدية E أكبر من جهد العتبة V_0 فإن هنالك نسبة من الجسيمات المنعكسة عن العتبة الجهدية. وهذه نتيجة غير متوقعة كلاسيكيا. فإذا ضرب شخص بابا من الخشب الرقيق بسيل من الإطلاقات من مدفع رشاش فإنه يتوقع أن تخرق جميع الإطلاقات ذلك الحاجز لأن طاقتها الحركية أكبر من طاقة الحاجز. لكننا هنا نجد أن ميكانيك الكم يقرر، من الناحية النظرية على الأقل، أن عددا من الإطلاقات يمكن أن يرتد عن الباب الخشبي الرقيق على الرغم من امتلاك الجسيمات لطاقة حركية كافية لخرق الباب. هذه النتيجة الغريبة ليس لها تفسير واضح في ميكانيك الكم لكنها بكل تأكيد ظاهرة محققة تجريبيا في العالم المجهري.

وكذلك ولو كانت الطاقة الحركية للجسيمات الساقطة على العتبة الجهدية E أقل من جهد العتبة V_0 فإن هنالك نسبة منها ستنفذ داخل العتبة الجهدية وهذا مخالف للحدس

الكلاسيكي. كيف؟ إذا كانت $E < V_0$ فإن k_2 تصبح كمية خيالية عندئذ يصبح الحل داخل المنطقة الجهدية هو $\psi_{II}(x) = Te^{-|q|x}$ وهذا يعني أن هنالك نفاذ الى داخل المنطقة الجهدية ولكن الشدة النسبية للجسيمات النافذة تضمحل أُسياً. إن هذه الظاهرة سوف تتضح على نحو أفضل عند دراسة مسألة الحاجز الجهدي. لكنني أريد التذكير هنا بأن هذه الظواهر الكمومية تتحقق فعليا في عالم الذرات والجزيئات أي العالم المجهري ولا تتحقق عمليا في العالم الجهري الكبير وذلك لأن متغيرات العالم الجهري كبيرة جدا مقارنة بثابت بلانك وإن الصفات الموجية في هذا العالم لا تظهر. لذلك لا نتوقع أن ترتد إطلاقة عن باب خشبي رقيق وإن حصل فإننا نقول أنها معجزة على حين نتوقع أن ترتد بعض الإلكترونات السريعة ذات الطاقة العالية عن بلورة جهدها أقل من طاقة الإلكترونات.



الشكل (4–4) دوال الموجة في العتبة الجهدية

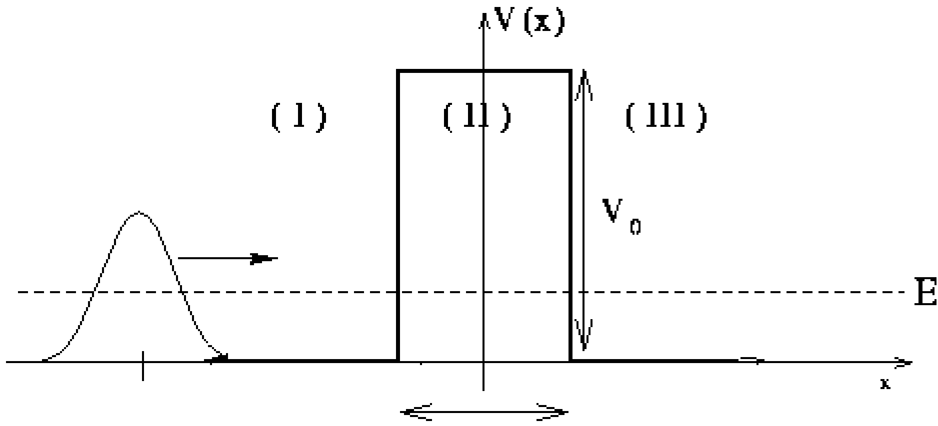
المسألة الثالثة: الحاجز الجهدي في بعد واحد

يمكن أن يكون الحاجز الجهدي أي وسط جديد يعزل وسطين عن بعضهما. مثلا حائط يفصل جزئي الغرفة عن بعضهما يمكن أن يكون حاجز جهدي. ومقدار الجهد المحدود في هذا الحائط هو مقدار تماسك جزيئات الحائط مع بعضها. أما في الواقع العملي فإن الرقائق

السليكونية داخل الترانسسترات والنبائط الإلكترونية يمكن أن تمثل حواجز جهدية بالنسبة للإلكترونات. وإذا اعتبرنا الجهد خارج الحاجز هو صفر فإننا يمكن أن نكتب الصيغة الرياضية للحاجز الجهدي كما يلي:

$$\begin{aligned} V &= 0 \quad x < 0 \\ &= V_0 \quad 0 < x < a \\ &= 0 \quad x > a \end{aligned} \tag{4.37}$$

ويمكن التعبير بالرسم كما يلي



الشكل (**4-5**) الحاجز الجهدي

في هذه المسألة لدينا ثلاث مناطق: واحدة داخل المنطقة الجهدية وإثنان خارجها قبل وبعد المنطقة الجهدية. إن معادلات شرودنجر للمناطق الثلاثة هي

$$\begin{aligned} \frac{d^2\psi_I(x)}{dx^2} + k^2\psi_I(x) &= 0 \\ \frac{d^2\psi_{II}(x)}{dx^2} + q^2\psi_{II}(x) &= 0 \\ \frac{d^2\psi_{III}(x)}{dx^2} + k^2\psi_{III}(x) &= 0 \end{aligned} \tag{4.38}$$

حيث أن

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2},\ q^2 = \frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2} \qquad (4.39)$$

إن حلول معادلات شرودنجر في (4.38) هي

$$\begin{aligned}\psi_I(x) &= e^{ikx} + \mathrm{Re}^{-ikx} \\ \psi_{II}(x) &= Ae^{iqx} + Be^{-iqx} \\ \psi_{III}(x) &= Te^{ikx}\end{aligned} \qquad (4.40)$$

تحليل المسألة فيزيائياً

من المنطقي القول أنه إذا كانت هنالك جسيمات ذات طاقة حركية E ترتطم بالحاجز الجهدي فإنها سوف تعبر الحاجز إذا كانت $E > V_0$. نعم، ربما سيرتد بعضها عن الحاجز نتيجة للتأثير الكمومي كما لاحظنا في المثال السابق عن العتبة الجهدية، لكن معظمها سيمر خلال الحاجز بعد أن يعاني تغيرا في زخمه الخطي.

سنهتم هنا بالحالة التي تكون فيها $E < V_0$ خصوصاً. في هذه الحالة سيكون

$$q = i\,\kappa = i\,\sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}} \qquad (4.41)$$

وعندئذ فإن دالة الموجة في المنطقة الجهدية ستكون

$$\psi_{II}(x) = Ae^{-\kappa x} + Be^{\kappa x} \qquad (4.42)$$

وفي هذه الحالة تُعبّر حلول معادلات شرودنجر في المناطق الثلاثة عن:

المنطقة الأولى: قبل الحاجز الجهدي تسقط حزمة من الجسيمات زخمها الخطي هو $p_I = \hbar k$ يمرق بعضها الى داخل الحاجز الجهدي وبعضها الآخر يرتد بشدة نسبية قدرها $|R|^2$.

المنطقة الثانية: داخل الحاجز الجهدي تمر الجسيمات بزخم أقل مما كانت عليه في خارج الجهد وإذا ما كانت $E < V_0$ فإن الشدة النسبية للجسيمات النافذة الى الحاجز تتناقص أسياً. زخم الجسيمات داخل الحاجز الجهدي يكون $p_{II} = \hbar q$. لكن قسماً أخر منها يمكن أن يعبر الحاجز الجهدي الى المنطقة الثالثة. وهذا يعتمد على عاملين طاقة الجسيمات الداخلة الى الحاجز وسمكه.

المنطقة الثالثة: بعد الحاجز الجهدي تتحرك الجسيمات التي عبرت الحاجز الى اليمين بزخم مساوي لزخمها الذي كانت عليه في المنطقة الأولى وباتجاه $+x$ فقط وبشدة نسبية قدرها $|T|^2$.

الشروط الحدودية

بعد أن صارت الحلول العامة واضحة لدينا أصبح من الضروري تطبيق الشروط الحدودية على المسألة وهنا لدينا

$$\begin{aligned}
\psi_I(0) &= \psi_{II}(0) \\
\left(\frac{\partial \psi_I}{\partial x}\right)_{x=0} &= \left(\frac{\partial \psi_{II}}{\partial x}\right)_{x=0} \\
\psi_{II}(a) &= \psi_{III}(a) \\
\left(\frac{\partial \psi_{II}}{\partial x}\right)_{x=a} &= \left(\frac{\partial \psi_{III}}{\partial x}\right)_{x=a}
\end{aligned} \tag{4.44}$$

وهذه العلاقات تعطينا المعادلات التالية

$$\begin{aligned}
&1 + R = A + B \\
&ik - ikR = -\kappa A + \kappa B \\
&Ae^{-\kappa a} + Be^{\kappa a} = Te^{ika} \\
&-\kappa Ae^{-\kappa a} + \kappa Be^{\kappa a} = ikFe^{ika}
\end{aligned} \tag{4.45}$$

هذه أربع معادلات جبرية بأربع مجاهيل حلها يفضي الى معرفة المجاهيل. وبحل المعادلات الأربعة نحصل على

$$R = ie^{-2ika}\,\frac{(k^2-\kappa^2)\sinh 2qa}{2k\kappa\cosh 2\kappa a + i\,(k^2-\kappa^2)\sinh 2\kappa a}$$

وما يهمنا هنا اولا استخراج معامل النفاد Transmission Coefficient (T) لدينا

$$T = e^{-2ika}\,\frac{2k\kappa}{2k\kappa\cosh 2\kappa a + i\,(k^2-\kappa^2)\sinh 2\kappa a}$$

وهكذا تكون نسبة الجسيمات النافذة عبر الحاجز الجهدي هي

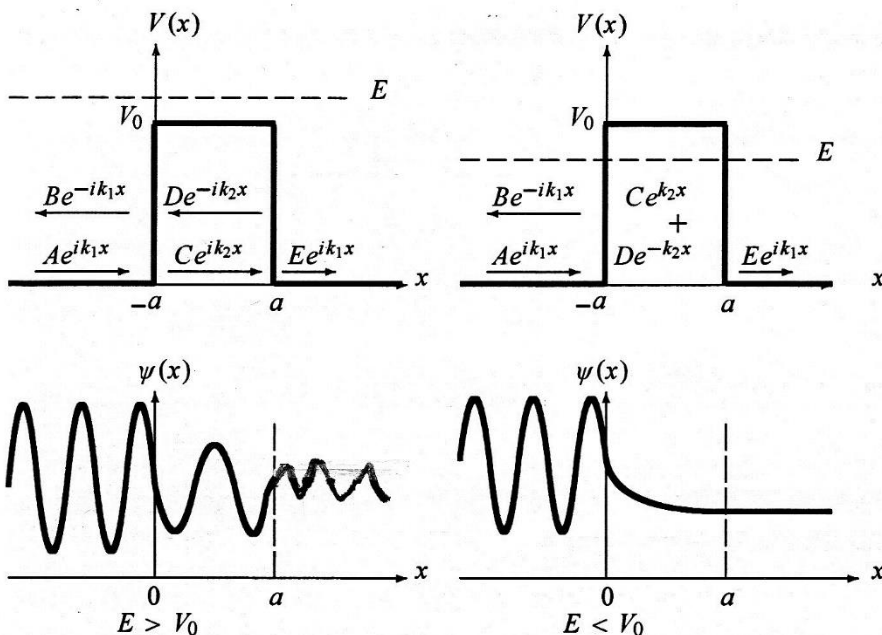
$$|T|^2 = T^*T = \frac{(2k\kappa)^2}{(k^2+\kappa^2)^2\sinh^2 2\kappa a + (2k\kappa)^2}$$

يعني هذا في حالة أن تكون $\kappa a >> 1$ فإن

$$T \sim \exp\left[-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_0-E)}\,a\right] \tag{4.46}$$

وتبين لنا هذه النتيجة أن هنالك نسبة من الجسيمات يمكن أن تنفذ عبر الحاجز الجهدي. وإن هذه النسبة تعتمد على عرض الحاجز الجهدي a وعلى طاقة الجسيم أو الجسيمات الواقعة على الحاجز. فكلما كان عرض الحاجز الجهدي كبيراً كانت إحتمالية نفاذ الجسيمات ذوات الطاقة الواطئة أقل، والعكس يحصل كلما كانت طاقة الجسيمات الساقطة على الحاجز أكبر كلما كان إحتمال نفاذها أكبر.

تسمى هذه الظاهرة التي تنفذ فيها جسيمات خلال الحاجز الجهدي ذات طاقة أقل من طاقة الحاجز نفسه ظاهرة التنفيق Tunneling Effect وهي ظاهرة مهمة جدا في فيزياء الحالة الصلبة وعليها تقوم كثير من خصائص النبائط الإلكترونية وبدونها لا يمكن للإلكترونيات الدقيقة أن تعمل.



الشكل (4–6) دوال الموجة في الحاجز الجهدي

مثال: إلكترونان طاقتهما 1 eV و 2 eV يسقطان على حاجز جهدي إرتفاعه 5 eV وعرضه 0.5 nm . إحسب إحتماليات النفاذ. كيف ستتأثر هذه الإحتماليات في حالة مضاعفة عرض الحاجز الجهدي.

الحل: في حالة $E = 1\ \text{eV}$ لدينا

$$\kappa = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar} = 1.0\times 10^{10}\ m^{-1}$$

وبما أن $a = 0.5\ \text{nm}$ لذا فإن $2\kappa a = 2\times 1.0\times 10^{10}\times 5\times 10^{-10} = 10.$ ولذا

$$T_1 = e^{-2\kappa a} = e^{-10} = 4.5\times 10^{-5}$$

وهذا يعني أن إلكترونا واحدا من كل 22000 إلكترون سيعبر الحاجز الجهدي. وهذه كما ترى إحتمالية تبدو قليلة لكن وجود عدد كبير من الإلكترونات العابرة وهو بمئات أو آلاف

الملايين يجعل تحقق هذه الظاهرة عمليا أمرا ممكنا. وبنفس الطريقة نحسب للحالة التي تكون فيها طاقة الإلكترونات $E = 2\ \text{eV}$ لنجد أن

$$T_2 = e^{-8.9} = 1.4 \times 10^{-4}$$

وهذه النتيجة أكبر ثلاثة أضعاف من السابقة.

أما في حالة توسيع الحاجز الجهدي ومضاعفة عرضه فإن النتيجة ستكون

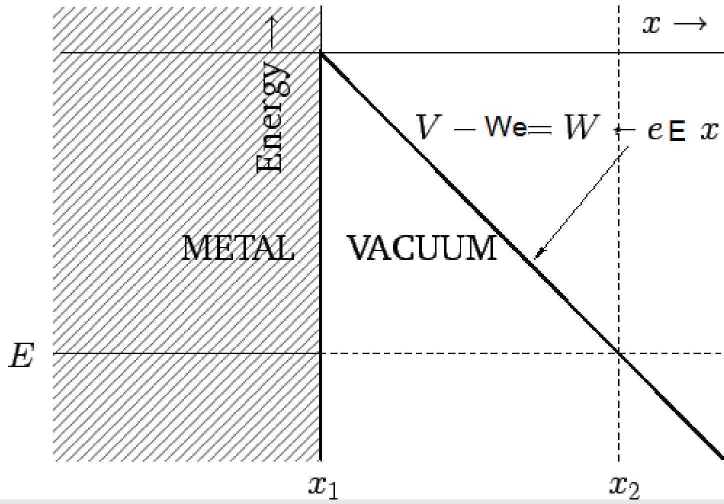
$$T_1 = 2.1 \times 10^{-9}, \qquad T_2 = 1.9 \times 10^{-8}$$

وهذا يؤشر هبوطاً كبيرا في إحتمالية النفاذ ومنه نتعلم أن عرض الحاجز له تأثير أكبر كثيرا مما لطاقة الجسيمات.

ظاهرة النفق الكمومي Quantum Tunneling

تُعد ظاهرة التنفيق الكمومي من الظواهر الكمومية المهمة وذلك لتطبيقاتها الكثيرة في عالم أشباه الموصلات والدوائر الإلكترونية الدقيقة. وتتلخص الظاهرة بعبور نسبة من الجسيمات لحاجز طاقة أكبر من طاقة الجسيمات أي $E < V_0$. ومن الناحية الكلاسيكية فإن هذا مستحيل طبعا إذ كيف يمكن لكرة منضدة مثلا نلقيها على حائط إسمنتي أن تخترقه؟ طبعا هذا غير متوقع كما أنه غير ممكن كلاسيكياً بالتأكيد. لكننا في العالم المجري نرى أن هذه الظاهرة تتحقق إذ كما رأينا في مسألة الحاجز الجهدي فإن الجسيمات يمكن أن تعبر الحاجز رغم أن طاقتها الكلية أقل من طاقة الحاجز. وهذه ظاهرة كمومية صرفة تتأسس أصلا في الطبيعة الموجية للأشياء وتفرضها الطبيعة الثنائية لأشياء العالم إذ تتجلى هذه الطبيعة في العالم المجري. وهنالك تطبيقات عملية كثيرة لظاهرة التنفيق الكمومي في عالم شبه الموصلات ولولاها لم يكن عمل الدوائر الإلكترونية الدقيقة ممكنا ولما أمكن تطوير التقنيات المعاصرة لأجهزة الاتصالات والمايكروسكوبات الإلكترونية والأجهزة التي تستخدم هذه الظاهرة.

تعلمنا من ظاهرة التأثير الكهرضوئي أن الإلكترونات تحتاج إلى قدر أدنى من الطاقة لكي تعبر الحاجز الجهدي الممثل بالقوة التي تمسك بالإلكترونات وتشدها داخل المادة. وهذا الحد الأدنى هو ما أسميناه دالة الشغل W. بالتالي يمكن تصور الإلكترونات وكأنها محصورة في صندوق كبير يحيط به حائط جهدي ارتفاعه W. إن بالإمكان تخليص الإلكترونات من المادة بالتسخين وكذلك يمكننا تخليص الإلكترونات بتسليط مجال كهربائي E قوي عليها يكون إتجاهه بحيث يطرد الإلكترونات بعيداً. وهذه الظاهرة تسمى الإنبعاث البارد Cold Emission. في مثل هذه الحالة تقل الطاقة الصغرى اللازمة لتخليص الإلكترونات وذلك لأن شغلا يبذله المجال الكهربائي على الإلكترونات يساعد على إخراجها. هذا الشغل مقداره We وكأن دالة الشغل تصبح $W - e\mathrm{E}\,x$. إن مثل هذا الحاجز الجهدي سوف يتمثل بجهد مثلثي كما في الشكل التالي



الشكل (4-7) الانبعاث البارد

بالتالي فإن جميع الإلكترونات التي تمتلك طاقة أكبر من $W - e\mathrm{E}\,x$ سوف تستطيع أن تهرب عبر هذا الجهد. وهنا نلاحظ أن دالة الشغل تتناقص كلما إزدادت شدة المجال الكهربائي E.

إن الحسابات الدقيقة باستخدام تقريبات WKB تظهر أن إحتمالية هروب الإلكترونات هي

$$|F|^2 = \exp\left(-\frac{2\sqrt{2m}}{\hbar}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{V(x)-E}\,dx\right)$$

بمعنى أن

$$|F|^2 = \exp\left(-\frac{2\sqrt{2m}}{\hbar}\int_{0}^{W/e\mathrm{E}}\sqrt{V(x)-e\mathrm{E}x}\,dx\right)$$

وهذه يمكن تبسيطها إلى

$$|F|^2 = \exp\left(-\frac{2\sqrt{2m}W^{1/3}}{\hbar e\mathrm{E}}\int_{0}^{1}\sqrt{1-y}\,dy\right)$$

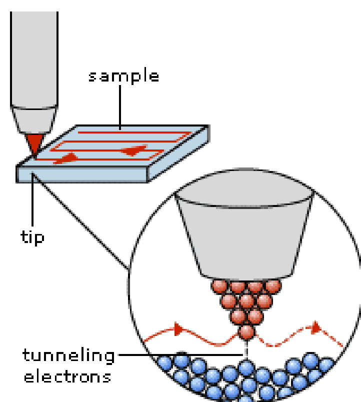
وبعد إجراء التكامل نجد النتيجة

$$|F|^2 = \exp\left(-\frac{4\sqrt{2m}}{3}\frac{W^{3/2}}{\hbar e\mathrm{E}}\right)$$

تسمى هذه العلاقة صيغة فولر_ نوردهايم ويلاحظ فيها أن فيض التنفيق يتناسب أسياً مع مما يجعل إعتمادية تيار الإلكترونات المتنفّقة حساساً جدا لتغير المجال الكهربائي. وهذا بالضبط هو ما أتاح للفيزيائيين التفكير في تصميم جهاز يمسح السطوح ويكشف عن تفاوتات دقيقة جدا تؤدي بالتالي إلى رسم خارطة كونتورية للسطح تكشف عن تضاريسه الدقيقة. وهذا الإختراع هو مايكروسكوب المسح النفقي.

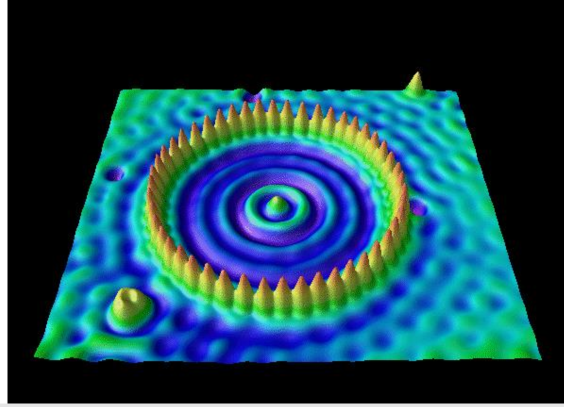
مايكروسكوب المسح النفقي

ويرمز له إختصاراً STM وهو مايكروسوب ماسح إلكتروني يقوم بتصوير السطح في ثلاثة أبعاد عبر مسحه ذرة ذرة. وتتألف تقنية هذا المايكروسكوب من إزميل ذي نهاية دقيقة جدا مؤلفة من ذرة واحدة توضع على مسافة صغيرة جدا من السطح المراد مسحه. وتستثمر ظاهرة التنفيق الكمومي لإبقاء المسافة بين السطح ونهاية الإزميل ثابتة أثناء عملية المسح كلها، إذ تغذي الإلكترونات المتنفقة دائرة كهربائية تسيطر على أرتفاع الأزميل عن السطح أثناء المسح. يعني هذا أن ظاهرة التنفيق الكمومي تحصل بين رأس الإزميل الدقيق والسطح، وهي التي تلعب الدور المحوي في تكنلوجيا هذا المايكروسكوب. ومن خلال تسجيل حركات الإزميل في ارتفاعه وهبوطه على نطاق السطح الممسوح نتمكن من تصوير طبوغرافية السطح بدقة الذرة الواحدة!! وهكذا يتمكن كمبيوتر صغير مرتبط بهذا المايكروسكوب من رسم خارطة كنتورية (صورة) دقيقة جدا للسطح.



الشكل (4–7) عمل مايكروسكوب التنفيق الإلكتروني

إن التطبيقات العملية لمايكرسكوب السمح النفقي كثيرة تشمل دراسة التفاعلات الكيمياوية السطحية ودراسة تراكيب الجزئيات العضوية فضلا عن دراسة دور العوامل الكيمياوية المساعدة في التفاعلات الكيمياوية فضلاً عن تطبيقات أخرى. وقد تم استخدام هذا النوع من المايكروسكوب في دراسة تراكيب وبنيات الحمض النووي DNA. والشكل أدناه صورة علوية مجسمة لذرة الحديد.



الشكل (**4–8**) صورة من نتاج ميكرسكوب التنفيق الإلكتروني

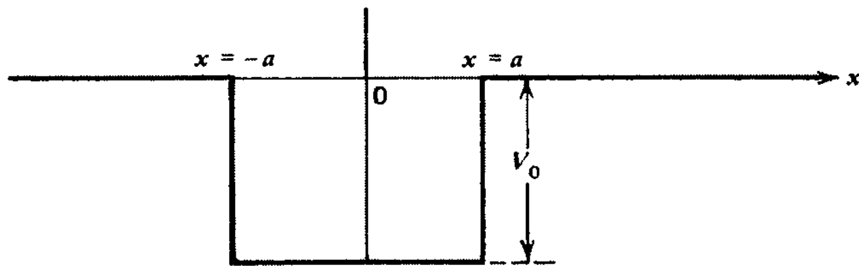
المسألة الرابعة: البئر الجهدي المحدود في بعد واحد

ما هو البئر الجهدي؟ إنه أي جهد سالب. وكل جهد سالب هو جهد جاذب بالضرورة. لذلك يمكن القول أن الإلكترون الواقع في الجهد الكهربائي للبروتون هو في بئر جهدي. وكذلك الكوكب الواقع في الجهد الجاذبي للشمس هو في بئر جهدي، حيث يكون الجهد في هذه الأحوال سالباً.

يمكن توصيف البئر الجهدي رياضيا كما يلي

$$\begin{aligned} V &= 0 \quad x < -a \\ &= -V_0 \quad -a < x < a \\ &= 0 \quad x > a \end{aligned} \tag{4.47}$$

وبالرسم يكون شكل البئر الجهدي كما يلي



الشكل (4–9) البئر الجهدي المحدود

هنا لدينا ثلاث مناطق الأولى قبل البئر الجهدي والثانية داخل البئر الجهدي والثالثة بعده. وإن معادلات شرودنجر لهذا النوع من الجهد هي

$$\psi_I(x) = e^{ikx} + \mathrm{R}e^{-ikx}$$
$$\psi_{II}(x) = Ae^{iqx} + Be^{-iqx} \qquad (4.48)$$
$$\psi_{III}(x) = Te^{ikx}$$

حيث أن

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}, \qquad q = \sqrt{\frac{2m(E+V)}{\hbar^2}} \qquad (4.49)$$

تحليل المسألة فيزيائياً

وكما في المسألة السابقة فيمكن وصف هذه الحلول على النحو التالي:

المنطقة الأولى: فيها دالة موجة (ممكن أن تكون حزمة من الجسيمات) ساقطة نحو البئر الجهدي وتمتلك زخماً خطياً قدره $p_I = \hbar k$ فينعكس قسم من هذه الجسيمات بنسبة قدرها $|R|^2$ والباقي يمر عبر البئر الجهدي.

المنطقة الثانية: وهي منطقة البئر الجهدي وعند دخول الجسيمات اليها يصبح زخمها $p_{II} = \hbar q$ وهو أكبر من زخم الجسيمات الداخلة الى البئر الجهدي ($p_{II} > p_I$) لماذا؟؟ لكن بعض الجسيمات المارة عبر البئر الجهدي تنعكس عن حافته الثانية وتسير باتجاه اليسار وتمثلها دالة الموجة Be^{-iqx} وهنا نتوقع أن يحصل تكميم لطاقة الجسيمات (لماذا؟).

المنطقة الثالثة: بعد البئر الجهدي حيث تكون بعض الجسيمات قد عبرت واكتسبت زخمها الأصلي ومضت في طريقها كموجة مستوية.

وكما فعلنا في المسألة السابقة فإن بالامكان حساب الثوابت التي في الحلول (4.48) بتطبيق الشروط الحدودية وهذه هي

$$\begin{aligned}
&\psi_I(-a) = \psi_{II}(-a) \\
&\left(\frac{d\psi_I(x)}{dx}\right)_{x=-a} = \left(\frac{d\psi_{II}(x)}{dx}\right)_{x=-a} \\
&\psi_{II}(a) = \psi_{III}(a) \\
&\left(\frac{d\psi_{II}(x)}{dx}\right)_{x=a} = \left(\frac{d\psi_{III}(x)}{dx}\right)_{x=a}
\end{aligned} \qquad (4.50)$$

وبتطبيق هذه الشروط نحصل على

$$\begin{aligned}
&e^{-ika} + \mathrm{Re}^{ika} = Ae^{-iqa} + Be^{iqa} \\
&k(e^{-ika} - \mathrm{Re}^{ika}) = q(Ae^{-iqa} - Be^{iqa}) \\
&Ae^{qa} + Be^{-qa} = Te^{ika} \\
&q\left(Ae^{qa} - Be^{-qa}\right) = kTe^{ika}
\end{aligned} \qquad (4.51)$$

ومن هذه المعادلات نتمكن من حساب الثوابت الضرورية التالية

$$R = ie^{-2ika}\frac{(q^2-k^2)\sin 2qa}{2kq\cos 2qa - i\,(q^2+k^2)\sin 2qa} \qquad (4.52)$$

كذلك

$$T = e^{-2ika} \frac{2kq}{2kq\cos 2qa - i\,(q^2 + k^2)\sin 2qa} \qquad (4.53)$$

يلاحظ أنه إذا كانت $E >> V_0$ فإنه عمليا لا يوجد أي إنعكاس للجسيمات عن البئر الجهدي نظرا لأن $q^2 \approx k^2$. على حين أنه في حالة أن تكون الطاقة الحركية للجسيمات قليلة جداً ($E \to 0$) فإن النفاذية تؤول الى الصفر. لكننا هنا نلاحظ خاصية مهمة ففي الحالة الخاصة التي يكون فيها $\sin 2qa = 0$ فإنه يحصل نفاذية كلية ولا يوجد أي إنعكاس للجسيمات عن البئر الجهدي. في هذه الحالة يكون $2qa = n\pi$ وبالتالي فإن

$$E_n = -V_0 + \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{8ma^2}, \quad n = 1, 2, 3... \qquad (4.54)$$

أي أنه عندما تكون طاقة الجسيمات بهذه المقادير فإنه يحصل نفاذية كلية للجسيمات عبر البئر الجهدي ولا ينعكس منها شئ. وكان أول من لاحظ هذه الخاصية الفيزيائيان رامساور وتاوزند عالم الليزر المعروف. وهذه الصفة يمكن تفسيرها بموجب تداخل دوال الموجة المنعكسة داخل البئر الجهدي تداخلا هداما يتيح للأمواج الخارجية من العبور دون إعاقة فيحصل النفاذ الكلي. أي أننا هنا أزاء حالة من حالات التناغم أو الرنين Resonance.

الحالات المقيدة داخل البئر الجهدي

توصف الحالات المقيدة في البئر الجهدي بتلك الحالات المحصورة فيه والتي تكون طاقتها الميكانيكية الكلية سالبة. الحالات المقيدة داخل البئر الجهدي فيزيائياً هي جسيمات محصورة فيه بقوى الجذب الماسكة لها مثل الإلكترونات في الذرة حيث تشكل هذه حالات سكونية Stationary States وهي حالات مراوحة فهي ليست ساكنة بل تراوح في حالها. دعنا نكتب

$$\frac{2mE}{\hbar^2} = -\alpha^2 \tag{4.55}$$

إن حلول دالة الموجة خارج البئر من جهة اليسار $x < -a$ هي

$$\psi(x) = C_1 e^{ax} \tag{4.56}$$

وإن حلول دالة الموجة من جهة اليمين $x > a,$ هي

$$\psi(x) = C_2 e^{-ax} \tag{4.57}$$

لذلك يمكن كتابة الحل داخل البئر

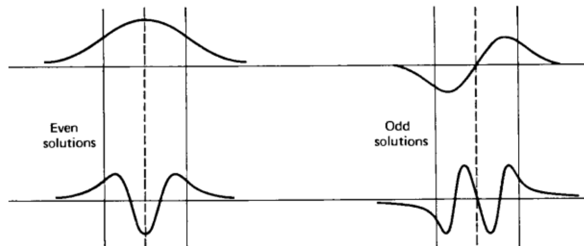
$$\psi(x) = A\cos qx + B\sin qx \qquad -a < x < a$$

حيث أن

$$q^2 = \frac{2m}{\hbar^2}\left(V_0 - |E|\right) > 0$$

إن الجهد متناظر حول نقطة الأصل كما أن الطاقة الحركية منحفظة عند تغيير $x \to -x$ ولذا فإن الهاملتوني لا يتغير عند تبديل $x \to -x$ ولذا ينبغي النظر في الحلول بموجب تماثليتها Parity. وبالنسبة للحلول الزوجية Even فإن الحل هو $C_2 = C_1$ أما الحلول الفردية فهي $C_2 = -C_1$ ويظهر من الشكل االتالي أن الدالة مستمرة بحسب الشرط

$$\left(\frac{1}{\psi(x)}\frac{d\psi(x)}{dx}\right)_{-a} = \left(\frac{1}{\psi(x)}\frac{d\psi(x)}{dx}\right)_{a}$$



الشكل (4−10) حالات مقيدة في البئر الجهدي

وفي حالة الحلول الزوجية تكون $B = 0$ وبالتالي يكون

$$-\alpha = -q\frac{\sin qa}{\cos qa}$$

أي أن

$$\alpha = q\tan qa \qquad (4.58)$$

وفي حالة الحلول الفردية يكون $A = 0$ ونحصل على

$$-\alpha = q\frac{\cos qa}{\sin qa}$$

وهذا يعني أن

$$\alpha = -q\cot qa \qquad (4.59)$$

ولكن دعنا الآن ننظر الى هذه الحلول كل لوحده.

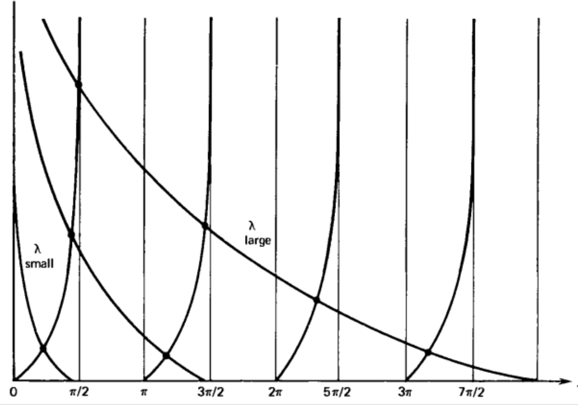
الحلول الزوجية: إذا عرّفنا المتغيرات

$$\lambda = \frac{2mV_0a^2}{\hbar^2} \qquad (4.60)$$
$$y = qa$$

فإن العلاقة (4.59) تصبح

$$\frac{\sqrt{\lambda - y^2}}{y} = \tan y$$

إذا ما رسمنا $\tan y$ مقابل $\sqrt{\lambda - y^2}/y$ فإننا نحصل على الشكل التالي



الشكل (4–11) حلول مسألة الحالات المقيدة

وفيه تكون نقاط التقاطعات هي القيم المخصوصة. ويتضح أيضاً أنه إذا كان الجهد أكثر عمقاً أو أكثر اتساعا فإنه سيشتمل على عدد أكبر من الحالات المقيدة.

ومهما كانت قيمة λ صغيرة فإنه على الأقل لابد أن توجد حالة مقيدة واحدة. وإذا إزدادت قيمة λ فإن نقاط التقاطع تصبح عند

$$y=(n+1/2)\pi, \quad n=1,2,3.... \tag{4.61}$$

الحلول الفردية: هنا تكون القيم المخصوصة هي

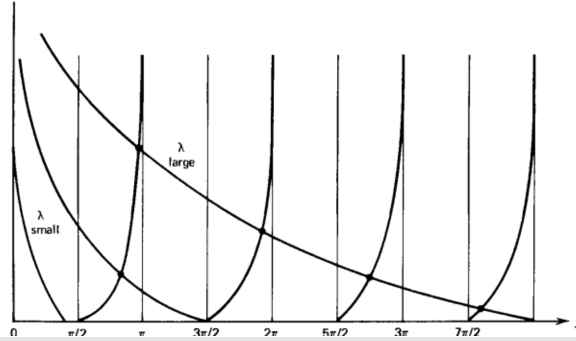
$$\frac{\sqrt{\lambda-y^2}}{y}=-\cot y$$

وبما أن $-\cot y=\tan(\pi/2+y)$ فإن الرسم سيكون مماثلا للرسم السابق بإزاحة قدرها $\pi/2$ ويكون التصرف في حالة أن تكون λ كبيرة هو

$$y=n\pi \quad n=1,2,3... \tag{4.62}$$

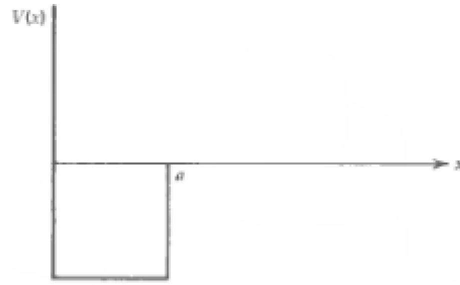
وسيكون هنالك تقاطعات عند

$$\frac{2mV_0a^2}{\hbar^2}\geq\frac{\pi^2}{4}$$



الشكل (4–12) حلول الحالات المقيدة الزوجية

أن جميع الحلول الفردية تصبح صفراً عند النقطة $x=0$. ولذا فإن مسألة الحالات المقيدة للحلول الفردية ستكون مماثلة لمسألة الجهد الممثل بالشكل التالي



الشكل (4–13) تمثيل مسألة

المسألة الخامسة: المتذبذب التوافقي البسيط

هذه واحدة من أهم مسائل الفيزياء لأنها تظهر لنا في كثير من مواضيع الفيزياء الذرية والجزيئية والنووية وفيزياء الحالة الصلبة والألكتروداينميك وفيزياء الجسيمات الأولية ولا يكاد فرع من فروع الفيزياء يخلو من وجه من وجوه هذه المسألة.

إن الطاقة الكلية للمتذبذب التوافقي تعطى في الصيغة الكلاسيكية كمجموع حدين: الأول للطاقة الحركية والثاني للطاقة الكامنة أو ما يسمى طاقة الوضع. ولذا فإننا نكتب

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \tag{4.63}$$

وإذا ما أردنا كتابة هذه الصيغة وفقا لقواعد ميكانيك الكموم فإن الطاقة هي الهاملتوني، والزخم الخطي p يصبح إجراء الزخم الخطي $p = -i\hbar \frac{d}{dx}$ وهكذا تكون لدينا معادلة الحركة للمتذبذب التوافقي البسيط كالآتي

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \psi(x) = E\psi(x)$$

وإذا أعدنا ترتيب هذه المعادلة نحصل على صياغة أفضل كما يلي

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \left(\frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{x^2}{x_0^4} \right) \psi(x) = 0 \tag{4.64}$$

حيث أن $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ مقدار ثابت له وحدات المسافة.

خطوط عريضة لحلول المسألة

لن نقوم بحل هذه المسألة نظراً لأننا سنعاود معالجتها على نحو أكثر أناقة وضبطاً بطريقة الإجراءات في فصل قادم لكننا هنا نقدم عرضاً للحل التحليلي المعتاد لهذه المسألة. إن حل المعادلة التفاضلية (4.64) قد أنجز من قبل الرياضيين منذ زمن طويل والحل عبارة عن متعدد حدود هرمايت. وإن ظهور الحد $x^2\psi(x)$ في المعادلة التفاضلية يرجح أن يكون الحل دالة غاوسية مثلاً $f(x)\exp\left(-x^2/2x_0^2\right)$. ولو أننا عوضنا هذا الحل في المعادلة التفاضلية فإننا نحصل على معادلة تفاضلية للدالة $f(x)$. وهذه المعادلة التفاضلية يجري حلها بنشر الدالة $f(x)$ كمفكوك قوى Power Series بدلالة x، مثلا $f(x) = \sum_n a_n x^n$ وهذه المتسلسلة تعطينا علاقة تكرارية عند تعويضها في المعادلة

التفاضلية الأصلية. وعند فرض الشرط بأنتهاء هذه المتسلسلة عند قيمة معينة فإننا نُحصّل القيم المخصوصة للطاقة وكما يلي

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \quad n = 0,1,\ 2,3...... \tag{4.65}$$

كما يمكن عن هذا الطريق إثبات أن دوال الموجة المسموحة تأخذ الصيغة

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}\,2^n n!\,x_0}} e^{-x^2/2x_0^2} H_n\left(\frac{x}{x_0}\right) \quad n = 0,1,2,3.....$$
(4.66)

حيث أن الدوال $H_n(x)$ هي ما يسمى متعددات حدود هرمايت Hermite Polynomials وسنقوم بتحليل هذه الحلول عندما نعاود دراسة المسألة عن بطريقة الإجراءات.

فيما يلي عدد من متعددات حدود هرمايت

$$\begin{aligned} H_0(y) &= 1 \\ H_1(y) &= 2y \\ H_2(y) &= 4y^2 - 2 \\ H_3(y) &= 8y^3 - 12y \\ H_4(y) &= 16y^4 - 48y^2 + 12 \end{aligned} \tag{4.67}$$

المسألة السادسة: جهد الدلتا δ-function Potentials

تعرّف دالة ديراك بأنها

$$\begin{aligned} \delta(x) &= 0 \qquad if\ x \neq 0 \\ &= \infty \qquad if\ x = 0 \end{aligned} \tag{4.68}$$

وهي تمثل مصدر نقطوي عند النقطة x=0 على المحور السيني. وبها يمكن تمثيل توزيع جميع الجهود النقطية أي الصادرة عن كتلة أو شحنة نقطية. ولتعميم الصياغة أعلاه يمكن أن نجعل النقطة هي $x=a$ بدلا من x=0 وبهذا تكون

$$\begin{aligned} \delta(x-a) &= 0 \qquad if\ x \neq a \\ &= \infty \qquad if\ x = a \end{aligned} \tag{4.69}$$

من خصائص دالة دلتا مايلي

$$f(x)\delta(x-a) = f(a)$$
(4.70)

وبالتالي فإن

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a) \tag{4.71}$$

ويعرف البئر الجهدي الدلتاوي في بعد واحد بأنه

$$V(x) = -\alpha\delta(x) \tag{4.72}$$

ولو أننا عوضنا هذا في معادلة شرودنجر لحصلنا على

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} - \alpha\delta(x)\psi(x) = E\psi(x) \tag{4.73}$$

دعنا نفترض أن $E<0$

في المنطقة $x<0$ سيكون $V(x)=0$ وبالتالي فإن معادلة شرودنجر تصير الى

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = \kappa^2\psi(x) \tag{4.74}$$

حيث أن $\kappa = \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar}$. وبما أن E سالبة فإن κ حقيقية وموجبة.

إن الحل العام للمعادلة هو

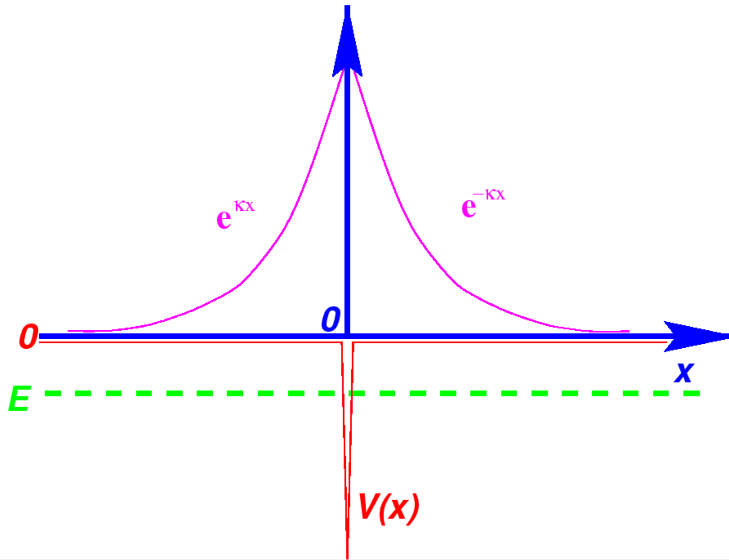
$$\psi(x) = Ae^{-\kappa x} + Be^{\kappa x} \qquad (4.75)$$

ونظرا لأن الحد الأول يصير الى مالانهاية عندما $x \to -\infty$ فإن $A=0$ وبهذا يكون

$$\psi(x) = Be^{\kappa x} \quad x < 0 \qquad (4.76)$$

في المنطقة $x>0$ سيكون $V(x)=0$ أيضا وبالتالي فإن حل معادلة شرودنجر العام $\psi(x) = Fe^{-\kappa x} + Ge^{\kappa x}$ إلا أن شرط المحدودية عند المالانهاية يحذف الحد الثاني، وبالتالي يكون الحل الخاص لهذه الحالة هو

$$\psi(x) = Fe^{-\kappa x} \quad x > 0 \qquad (4.77)$$



الشكل (**14–4**) جهد دالة الدلتا

إن هذه الحلول يمكن تقويمها إلى الوحدة. وبتطبيق الشروط الحدودية يكون لدينا

$$\left(\frac{d\psi(x)}{dx}\right)_{x=0+} - \left(\frac{d\psi(x)}{dx}\right)_{x=0-} = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2}\psi(0) \qquad (4.78)$$

وهذه المعادلة تعطينا $-\kappa - \kappa = -\frac{2m}{\hbar^2}\alpha$ أي أن $\kappa = \frac{2m\alpha}{\hbar^2}$ بالتالي فإن

$$E = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2} \tag{4.79}$$

وهذه الصيغة كما هو واضح تعبر عن طاقة حالة مقيدة في بئر جهدي محدود. بالتالي فإن الجسيم الجهد الدلتاوي (شحنة نقطوية مثلا) السالب إنما يتمتع بنفس الصفات التي للجسيم في البئر الجهدي وكلاهما تماثل حالة الحسيم في صندوق من حيث بنية توزيع مستويات الطاقة.

أما دالة الموجة فإنها تتخذ الصيغة التالية

$$\psi(x) = Be^{-m\alpha|x|/\hbar^2}$$

ويمكننا الآن إيجاد ثابت التقويم B كما يلي

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 \, dx = 2|B|^2 \int_0^{\infty} e^{-2\kappa x} dx = \frac{|B|^2}{\kappa} = 1$$

أي ان

$$B = \sqrt{\kappa} = \frac{\sqrt{m\alpha}}{\hbar}$$

بالتالي فإن

$$\psi(x) = \frac{\sqrt{m\alpha}}{\hbar} e^{-m\alpha|x|/\hbar^2}$$

وهنالك مسائل أخرى يمكن حلها على نفس المنوال للجهود الدلتاوية منها مسألة الجهد الدلتاوي المزدوج وهو الذي يمثل إلكترونا واقعا بين بروتونين مثل جزيئة الهيدروجين المتأينة.

أسئلة مفاهيمية للفصل الرابع

ما المقصود بالجهد Potential وما الذي يتسبب عنه؟

هل الجهد اللانهائي Infinite Potential واقعي؟ وكيف يمكن القول بوجود جهد لانهائي؟

للجسيم المحصور في صندوق حالات ممكن كثيرة فما هذه الحالات وما عددها؟ وهل يمكن التعبير عن هذه الحالات بأمواج دي بروي؟ كيف؟

ما الذي يحصل لزخم الجسيم الداخل الى جهد سالب. وما الذي يحصل لموجته؟ وما الذي يحصل للجسيم الداخل الى جهد موجب وما الذي يحصل لموجته؟ إرسم الحالتين للمقارنة.

ما الحالات المقيدة؟ وما يكون سبب تقييدها عادةً؟

ما المقصود بالتنفيق الكمومي وهل يمكن أن يحصل التنفيق الكمومي لموجة حقيقية خالصة ليس فيها جزء خيالي. وضّح ذلك رياضياً؟

إضرب مثالاً لمتذبذب توافقي كمومي.

إضرب مثالاً لجهد دلتاوي مزدوج.

مسائل الفصل الرابع

س1) جسيم في حالة متراوحة stationary state يوصف بدالة الموجة

$$\begin{aligned} \psi(x) &= 0 & x &< -a \\ &= A(1+\cos \pi x/a) & -a &\le x \le a \\ &= 0 & x &> a \end{aligned}$$

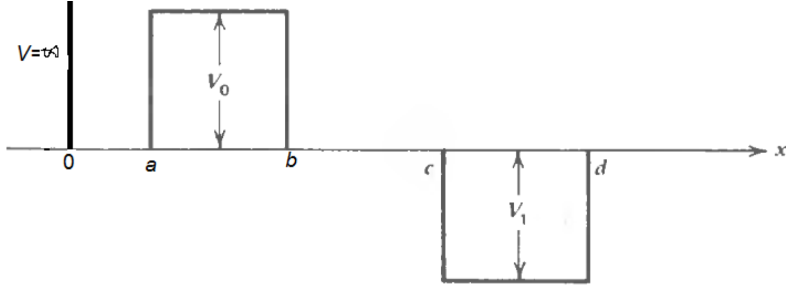
حيث أن A و a هي كميات حقيقية.

هل يمكن أن تمثل هذه الدالة نظاما فيزيائياً؟

أوجد قيمة ثابت التقويم A .

إحسب Δx و Δp وحقق أن $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$.

س2) دون الحاجة إلى الدخول في حل معادلة شرودنجر حاول أن تتوقع الحلول الممكنة في الأنطقة المبينة في الشكل التالي



س3) إحسب معامل الإنعكاس عن عتبة جهدية إذا علمت أن زخم الجسيم داخل الجهد هو نصف زخمه الحر قبل دخوله إلى الجهد.

س4) إذا كان لديك

$$V(x) = 0 \qquad 0 < x < a$$
$$= \infty \qquad elsewhere$$

إحسب طاقة الإلكترون بالإلكترون فولط في صندوق ذي بعد واحد عرضه $a = 10^{-10}$ متر.

إحسب طاقة كرة معدنية كتلتها 1غم في صندوق عرضه 10سم.

استخدم مبدأ اللادقة لتقدير سرعة الإلكترون وسرعة الكرة المعدنية في هذا السؤال.

س5) إذا كان لديك جسيم في صندوق صلب ذي بعد واحد قدره a وكان فيه إلكترون في الحالة الدنيا للطاقة وحصل أن توسع الصندوق فجأة ليصبح مقدار بعده $4a$. إحسب

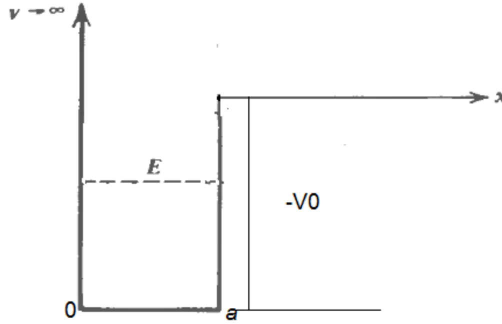
إحتمالية أن تجد الإلكترون في (أ) الحالة الدنيا للطاقة في الصندوق الجديد. (ب) الحالة المثارة الأولى للصندوق الجديد.

س6) استخدم مبدأ اللادقة لبيان أن الطاقة الدنيا للمتذبذب التوافقي الذي يتحرك في المدى $-a/2 \le x \le a/2$ هي $\hbar\omega/2$.

س7) إحسب إحتمالية إيجاد الجسيم في المنطقة المحضورة كلاسيكيا للمتذبذب التوافقي للحالات $n = 0,1,2,3,4.$ وهل أن النتيجة متوافقة مع الحالة الكلاسيكية؟

س8) إذا كان لديك جهد كالذي في الرسم التالي والموصوف بالحدود

$$V(x) = \infty \qquad x \le 0$$
$$= -V_0 \qquad 0 \le x \le a$$
$$= 0 \qquad x \ge a$$



(أ) جد دالة الموجة في جميع المناطق

(ب) جد قيم الطاقة الممكنة بحل المعادلة باستخدام تقاطع المنحنيات

(ج) إحسب القيمة الدنيا للجهد بحيث تكون هنالك حالة مقيدة واحدة في البئر الجهدي ومنها أوجد أقل قيمة للجهد لكي يحتوي البئر الجهدي n من الحالات المقيدة.

س9) جسيم كتلته m ألقي في بركة ماء. ماذا تمثل البركة للجسيم في حالة إهمال قوة الجاذبية الأرضية إذا كانت عميقة جداً؟ أكتب معادلة شرودنجر لهذه الحالة. (فائدة: مثّل ماء البركة على بصيغة جهد ثابت)

ماذا تمثل البركة في حالة وجود الجاذبية الأرضية إذا كان عمقها محدوداً؟ أكتب معادلة شرودنجر لهذه الحالة. (فائدة: مثّل ماء البركة على بصيغة جهد سالب يتناسب مع العمق)

س10) إذا علمت أن أقصر طول موجي يمكن أن يحتويه صندوق ذي بعد واحد هو نصف طول موجة دي بروي للجسيم. استخدم هذه المعلومة لحساب الطاقة الصغرى لجسيم محصور في صندوق ذي بعد واحد مقداره L.

س11) أكتب الهاملتونيات التالية

- جسيم حر يتحرك في ثلاثة أبعاد.
- جسيم في جهد سالب ثابت المقدار.
- إلكترون في جهد كهربائي لبروتون.
- جسيم في جهد معتمد على الزمن
- جسيم مشدود في زنبرك يتحرك على المحور z.

الفصل الخامس

البنية الرياضية لميكانيك الكم

إن الصياغة الرياضية التي تقدمها معادلة شرودنجر لمعادلة الحركة في ميكانيك الكموم هي صياغة قائمة على التصور الموجي للنظم الفيزيائية إذ تتخذ دالة الموجة فيها صيغة رياضية تعتمد بموجبها على المكان والزمان أو على المكان فقط في حالة كون النظام لا يعتمد على الزمن. وفي هذه الصياغة فإن معادلة شرودنجر هي معادلة موجة ذات وضع خاص وبالأحرى هي معادلة إنتشارDiffusion Equation. ونظرا لأن ميكانيك الكموم مختلف في كثير من السمات عن الميكانيك الموجي ولغرض اعطاء الموضوع شخصيته المتكاملة فقد صار إلى صياغة مفاهيم وقوانين هذا العلم بالإعتماد على فضاء هلبرت تأسيسا للبنية الرياضية إذ يتخذ من فضاء هلبرت مسرحا لعمليات ميكانيك الكموم حيث تلعب الأدوار فيه متجهات الحالة State Vectors والإجراءات Operators.

الفروض الأساسية لميكانيك الكموم Basic Postulates

بعدما تمكن الفيزيائيون النظريون من تشخيص الصفة الكمومية للمتغيرات الفيزيائية في العالم المجهري وبعد أن تم تكوين معادلة الحركة في ميكانيك الكموم والتي هي معادلة شرودنجر، ظهر التوجه نحو بناء صياغة شمولية لميكانيك الكموم. هذه الصياغة التي وضعت أمامها خمسة فروض أو مسلمات أساسية تم استخلاصها من التجارب العملية والمعالجات النظرية التي أوضحناها في الفصول السابقة من هذا الكتاب. هذه الفروض سنعرضها في مستهل هذا الفصل ثم نعمل على استعمالها فيما يلي من الفصل لنقيم بها البنية الرياضية والمضمون الفيزيائي الأساسي لنظرية الكموم.

الفرض الأول: حالة النظام

إن حالة أي نظام فيزيائي عند زمن t تتمثل بمتجه حالة State Vector في فضاء هلبرت $|\psi_n>$ وإنها تحتوي على كافة المعلومات التي نحتاجها عن النظام. وإن هذه الحالة هي نتاج تراكب جميع الحالات الممكنة للنظام.

الفرض الثاني: الملحوظات والإجراءات

لكل كمية فيزيائية قابلة للقياس (ملحوظ Observable) إجراء هرمايتي يقابلها، وتؤلف المتجهات المخصوصة لذلك الإجراء مجموعة كاملة Complete Set. مثال ذلك الطاقة الكلية هو E فلهذا الملحوظ إجراء يقابله وهو الهاملتوني H بحيث يكون

$$H\,|\psi_n>=E_n\,|\psi_n>$$

في هذه الحالة تؤلف $|\psi_n>$ وهي المتجهات المخصوصة للهاملتوني مجموعة كاملة Complete Set.

الفرض الثالث: القياسات والقيم المخصوصة

إن عملية قياس أي ملحوظ فيزيائي تتم عبر إعمال الإجراء المقابل له على متجه الحالة $|\psi(x)>$ وإن النتيجة الممكنة هي واحدة من القيم المخصوصة لهذا الإجراء والتي تكون قيماً حقيقية، وإن حالة النظام تصير إلى الحال المقابلة لتلك القيمة المخصوصة فور إجراء عملية القياس.[2] وهذا تعبير عن كيفية ظهور قيمة معينة من تلكم القيم المخصوصة الممكنة.

الفرض الرابع: الطبيعة الإحتمالية لنتائج القياسات

[2] لقد فسّرت مدرسة كوبنهاجن التي يتزعمها نيلز بور وفيرنر هيزنبرغ هذا الفرض على أنه يتضمن القول بإسقاط متجه الحالة (دالة الموجة) على الحالة القائمة للنظام. لكن هذا التفسير رغم شيوعه يبقى موضع جدل وخلاف.

نتائج القياسات الكمومية إحتمالية جوازية ولا سبيل الى قياسها بدقة لا نهائية إلا إذا كان النظام أصلا في الحال التي هو عليها.[3]

الفرض الخامس: التطور الزمني للنظام

يحتكم النظام الفيزيائي اللانسبوي الى معادلة شرودنجر المعتمدة على الزمن في تحديد ما ستؤول اليه الحالة. وهذه هي

$$H\,|\psi(x,t)>= i\hbar\frac{\partial\,|\psi(x,t)>}{\partial t}$$

وهذا يعني أن التطور الزمني لمتجه الحالة سيكون محكوماً بالهاملتوني أي بالعامل $e^{-iH(t-t_0)/\hbar}$. وهذا أمر منطقي طبعاً.

هذه هي الفروض أو المسلمات الخمسة الأساسية لميكانيك الكموم وعليها تقوم صياغات البنية الرياضية التي سنقدمها فيما يلي من بنود هذا الفصل والذي يليه.

الفضاء المتجهي الخطي Linear Vector Space

نعلم أن الكميات الفيزيائية التي نتعامل معها في الفيزياء الكلاسيكية تنقسم الى متجهات Vectors وأعداد Scalars وتوجد كميات أخرى قلّما نتعامل معها تسمى الممتدات Tensors مثل مُركِّبات عزم القصور الذاتي. ويُعّرف المتجه بأنه أي كمية لها مقدار وإتجاه، مثال ذلك القوة أو الزخم الزاوي أو العزم. ويتم نشر المتجه في ثلاثة أبعاد مكانية كما يلي

$$\mathbf{V}=\sum_{i=1}^{3}\mathrm{e}_i V_i \qquad (5.1)$$

[3] هكذا هو الفرض السائد في تفسير مدرسة كوبنهاجن، وهذه قضية خلافية إلا أنني أرى أن نتائج القياس الكمومي إحتمالية جوازية في كل الأحوال نظراً لأن تقلب النظم الفيزيائية على الأحوال الممكنة يحصل بسرعة كبيرة حتى لا تتمكن آلة القياس من إدراك المقيس عند حالة معينة ولو وقع ذلك لأمكننا تحقيق تأثير زينو الكمومي ,وهي مسألة سيتم مناقشتها في الجزء الثاني من الكتاب.

حيث تمثل الكميات V_i المركبات الثلاثة للمتجه، وتمثل $\{e_i\}$ مجموعة كاملة من الأسس Basis المقومة والمتعامدة على بعضها تقع على محاور نظام الإحداثيات، ولكل منها قيمة وحدة واحدة أي هي متجهات الوحدة Unit Vectors المتعامدة على بعضها؛ مثلا في نظم الإحداثيات الديكارتية يكون لدينا (**i, j, k**) لهذا نقول عنها مجموعة متعامدة كاملة.

وشرط التعامد والتقويم معاً (التعويم) Orthonormality هو

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \tag{5.2}$$

ولغرض التعامل مع المتجهات يجري تعريف ما يسمى المضروب القياسي Scalar (أو العددي) بين أي متجهين كما يلي

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{U} = VU \cos\theta \tag{5.3}$$

ونعلم أيضا أن أي مركبة للمتجه **V** يمكن تحصليها بالضرب القياسي لمتجه الوحدة مع المتجه نفسه فيكون

$$\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{V} = \sum_i (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i) V_i = \sum_i V_i \delta_{ij} = V_j \tag{5.4}$$

إن التذكير بهذه المعلومات الأولية ضروري لفهم ما سيأتي.

شروط الفضاء المتجهي الخطّي Linear Space

إن الفضاء المتجهي الخطي يتألف من مجموعتين من العناصر وقاعدتين للتأليف:

مجموعة المتجهات مثل $\psi, \phi, \chi, ...$ ومجموعة الأعداد مثل $a, b, c, ...$

أما قاعدتي التأليف فهما قاعدة الجمع وقاعدة الضرب

قاعدة الجمع: وهذه تقضي بما يلي

إذا كان $|\psi>$ و $|\phi>$ متجهين (عنصرين) في الفضاء فإن مجموعهما أي $|\chi> = |\psi> + |\phi>$ هو عنصر ثالث في الفضاء نفسه.

التبادلية: وتعني أن $|\psi>+|\phi>=|\phi>+|\psi>$

الإشتراك: ويعني أن $(|\psi>+|\phi>)+|\chi>=|\psi>+(|\phi>+|\chi>)$

وجود الصفر: ويعني هذا ضرورة وجود متجه صفري $|0>$ بحيث يكون $|\psi>+|0>=|0>+|\psi>=|\psi>$.

وجود المعكوس الجمعي لكل عنصر (متجه) في الفضاء مثل $-|\phi>$ بحيث يكون $|\phi>+(-|\phi>)=|0>$.

قاعدة الضرب: وهذه القاعدة تنظم ضرب المتجهات بالأعداد. فبصورة عامة تقول القاعدة (أ) أنه إذا كان $|\psi>$ و $|\phi>$ هما متجهان في الفضاء فإن مجموعهما الخطي $a|\psi>+b|\phi>$ هو متجه ثالث ينتسب الى الفضاء نفسه. وعلى هذا الأساس يعتمد التوزيع الخطي في قاعدة الضرب كما يلي:

$$a(|\psi>+|\phi>)=a|\psi>+a|\phi>$$

وكذلك $(a+b)|\psi>=a|\psi>+b|\psi>$.

(ب) أما المشاركة في قاعدة الضرب الخطي فهي

$$a(b|\psi>)=(ab)|\psi>=ab|\psi>$$

(ت) كما يتوجب وجود عنصر في الفضاء يمثل عنصر الوحدة unitary وكما يلي: $I|\psi>=|\psi>I=|\psi>$ ومن المفهوم أن ضرب أي عنصر من عناصر الفضاء بالمتجه الصفري ينتج صفراً.

هذه هي اشتراطات الفضاء المتجهي الخطي. وعليها يمكن تأسيس فضاء بأي عدد كان من الأبعاد. ومن هذه الفضاءات الخطية فضاء إقليدس الثلاثي الأبعاد وفضاء هلبرت الذي سندرسه في هذا الفصل.

الإستقلال الخطّي وأبعاد الفضاء

إذا توفر لدينا مجموعة من متجهات $A_1, A_2, A_3.....A_n$ ليس منها صفري فإن هذه المتجهات يقال عنها مستقلة خطيا Linearly Independent إذا ما كان حل المعادلة

$$\sum_{i=1}^{N} a_i A_i = 0 \tag{5.6}$$

هو $a_1 = a_2 = ... = a_N = 0$ حصراً. أي أن كل حد من حدود المعادلة أعلاه يكون صفراً بذاته.

مثال: بين أي مجموعة من المتجهات الإقليدية التالية هي مجموعة خطّية واي منها غير خطّية؟

$(a)\ A = (3,0,0),\ B = (0,-2,0),\ C = (0,0,-1)$
$(b)\ A = (6,-9,0),\ B = (-2,3,0)$
$(c)\ A = (2,3,-1),\ B = (0,1,2),\ C = (0,0,-5)$
$(d)\ A = (1,-2,3),\ B = (-4,1,7),\ C = (0,10,11),\ D = (14,3,-4)$

الحل: إن المجموعة الأولى هي متجهات خطية بالتأكيد. نستدل على ذلك كما يلي:

$$a_1 A + a_2 B + a_3 C = 0 = 3i a_1 - 2j a_2 - k a_3$$

وبما أن المتجهات الأساسية مستقلة فإن حل المعادلة أعلاه هو

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0$$

أما المجموعة الثانية فلدينا

$$a_1 A + a_2 B = 0 = (6a_1 - 2a_2)i + (-9a_1 + 3a_2)j$$

وهذا يعني أن

$$(6a_1 - 2a_2) = (-9a_1 + 3a_2) = 0$$

وهذا يعني أن $a_2 = 3a_1$ ، وهذا واضح من صيغة المتجهين فإن $A = -3B$.

وهكذا يمكننا فحص المجموعة الثالثة والرابعة وأترك هذا للطالب.

فضاء هلبرت Hilbert Space

وإذا توفرت لدينا مجموعة كاملة من متجهات أساسية Basis Vectors فإن بأمكاننا تكوين فضاء هلبرت ابعاده بعدد تلك المتجهات الأساسية. وفضاء هلبرت هو الفضاء الرياضي الذي يؤسس للبنية التحتية لنظرية الكموم في واحدة من أفضل صياغاتها الرياضية. وهو فضاء خطي متجهي Linear Vector Space، لا نهائي الأبعاد بصورته العامة ويمكن أن يكون محدود الأبعاد أيضاً.

يعرّف المتجه Vector في فضاء هلبرت بأنه دالة معقدة Complex Function للزمان والمكان. وهكذا يمكن أن تكون المتجهات الأسسية Basis Vectors للفضاء دوال معقدة أيضاً.

نرمز إلى المتجه في فضاء هلبرت بالرمز $|\psi>$ ويسمى كت بساي ket- Psi والمتجه في فضاء هلبرت يمكن تمثيله بمصفوفة عمودية أبعادها هي أبعاد الفضاء ×1. مثلاً

$$|\psi>=\begin{pmatrix} a \\ b \\ . \\ . \\ n \end{pmatrix} \qquad (5.7)$$

ونرمز لقرين المتجه $|\psi>$ بالرمز $<\psi|$ وتسمى القرين الهرمايتي Hermitian Conjugate وهي مصفوفة أفقية عواملها مؤلفة من القرائن المعقدة لعوامل مصفوفة $|\psi>$ ذلك أن

$$<\psi|=|\psi^*>^T \qquad (5.8)$$

حيث يرمز الحرف T إلى الابدال Transpose وبالتالي فإن $<\psi|$ هو مصفوفة أفقية أبعادها 1× أبعاد الفضاء. مثلا

$$<\psi|=\begin{pmatrix} a^* & b^* & . & . & n^* \end{pmatrix} \qquad (5.9)$$

تسمى الرموز برا ـ كت التي استعملناها هنا رموز ديراك Dirac Notations نسبة الى عالم الفيزياء ديراك.

إن مجموعة متجهات الكت $\{|\psi>\}$ تؤلف فضاء هلبرت المسمى فضاء الكت ket-Space فيما تؤلف مجموعة متجهات البرا $\{<\psi|\}$فضاء هلبرت القرين Dual Space. وهذين الفضائين متناظرين حيث أن لكل كت هنالك برا مفردة ولكل برا يوجد كت مفردة. ومن خصائص المتجهات والمتجهات القرينة ما يلي

$$|a\psi>=a|\psi>, \quad <a\phi|=a^*<\phi|$$

لاحظ أنه لا معنى للمضروبات $|\psi>|\psi>, \ <\phi|<\phi|$ فهذه لامعنى لها في فضاء هلبرت.

المضروب المقياسي في فضاء هلبرت *Scalar Product*

يُعرَّف المضروب القياسي لمتجهين $|\psi>$ و $|\phi>$ في فضاء هلبرت بأنه مسقط أحد المتجهين على الآخر أي أنه $<\phi|\psi>$. وهذا يعني أن المضروب القياسي للمتجهين هو تكامل تداخل المتجهين خلال المدى المقصود لهما، أي

$$<\phi|\psi>=\int \phi^*\psi dx \tag{5.10}$$

ولا يوجد ضرب متجهي لمتجهات هلبرت. لاحظ أن

$$<\phi|\psi>=<\psi|\phi>^* \tag{5.11}$$

ويُعرَّف المتجه المقوم بأنه الذي يكون مضروبه القياسي مع نفسه يساوي واحد صحيح.

$$<\psi|\psi>=\int \psi^*\psi dx=\int |\psi|^2\, dx=1 \tag{5.12}$$

وباستخدام (5.7) و(5.9) نجد أن

$$<\psi|\psi>=|a|^2+|b|^2+.....+|n|^2=1 \tag{5.13}$$

كما تُعرَّف المتجهات المتعامدة المقومة Orthonormal بأنها التي تنتج عن مضروبها القياسي دالة دلتا كرونيكر وكما يلي

$$<\psi_m|\psi_n>=\delta_{mn} \qquad (5.14)$$

المضروب المباشر Direct product

إن المضروب المباشر لمتجهين يعني ضرب عناصرهما ببعضهما كافة مثلاً

$$|\psi><\phi|=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1^* & b_2^* & . & . \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1b_1^* & a_1b_2^* & . & . \\ a_2b_1^* & a_2b_2^* & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix} \qquad (5.15)$$

أي أن المضروب المباشر لمتجهين في فضاء هلبرت هو مصفوفة مربعة وهذا هو إجراء كما سيتضح لنا.

سوية المتجه Norm of Vector

لكل متجه في الفضاء الإقليدي مقدار وإتجاه وفي فضاء هلبرت يرمز لمقدار المتجه بالرمز $|\psi|$، ويسمى سوية المتجه Norm of Vector. أما الإتجاه فيعوض عنه بدلالة الطور Phase. وتسمى الكمية $<\psi|\psi>$ مربع سوية المتجه، ويرمز لها $|\psi|^2$ وهي تساوي مجموع مربعات مركبات المتجه تماما كما في الفضاء الإقليدي وهذا موضح في المعادلة (5.13).

مثال(1): لديك المتجهين

$$|\psi>=\begin{pmatrix} -3i \\ 2+i \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad |\phi>=\begin{pmatrix} 2 \\ -i \\ 2-3i \end{pmatrix}$$

إحسب $<\phi|$ ، $<\phi|\psi>$ ، $|\phi><\psi|$

الحل:

$$<\phi| = |\phi^* >^T = \begin{pmatrix} 2 & i & 2+3i \end{pmatrix}$$

والآن

$$<\phi|\psi> = \begin{pmatrix} 2 & i & 2+3i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3i \\ 2+i \\ 4 \end{pmatrix} = 7+8i$$

وكذلك نحسب

$$|\phi><\psi| = \begin{pmatrix} 2 \\ -i \\ 2-3i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3i & 2-i & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6i & 4-2i & 8 \\ 3 & 1-2i & -4i \\ 9+6i & 1-8i & 8-12i \end{pmatrix}$$

مثال: لديك المتجهين $|\psi> = 2i|\phi_1> + |\phi_2> - a|\phi_3> + |\phi_4>$ و $|\chi> = 3|\phi_1> - i|\phi_2> + 5|\phi_3> - |\phi_4>$،

(أ) لو فرضنا أن المتجهين متعامدين فما قيمة a؟

الحل: نأخذ المضروب القياسي للمتجهين مع بعضهما ونساويه للصفر طالما أن المتجهين متعامدين. وهكذا يكون

$$\begin{aligned} &<\chi|\psi> = 0 \\ &= (3<\phi_1| + i<\phi_2| + 5a<\phi_3| - <\phi_4|)(2i|\phi_1> + |\phi_2> - a|\phi_3> + |\phi_4>) \\ &= 7i - 5a - 1 = 0 \end{aligned}$$

وهذا يعني أن $a = (7i-1)/5$.

(ب) قوّم المتجهين أعلاه.

نشر المتجهات في فضاء هلبرت

إذا توفرت مجموعة كاملة من متجهات أساسية Basis Vectors متعامدة ومقومة مثل $\{|u_n>\}$ فيمكن أن نؤلف منها فضاء هلبرت أبعاده هي بعدد تلك المتجهات الأساسية. إذن يكون لدينا

$$<u_m|u_n>=\delta_{mn} \tag{5.16}$$

وعندئذ يمكننا أن ننشر أي متجه بدلالة مركباته على الأسس المعينة كما يلي

$$|\psi>=\sum_n a_n|u_n> \tag{5.17}$$

حيث أن a_n هي أعداد معقدة تمثل معاملات المفكوك وهي في الحقيقة تمثل مركبات المتجه $|\psi>$ تماما كما هو الحال في الفضاء المتجهي الحقيقي الإقليدي.

ويمكن إيجاد هذه الأعداد باستخدام شرط التعامد في (5.16) وكما يلي

$$<u_m|\psi>=\sum_n a_n<u_m|u_n>=\sum_n a_n\delta_{mn}=a_m \tag{5.18}$$

من الواضح أن a_n يمثل قيمة مسقط المتجه العام $|\psi>$ على المتجه الأساس $|u_n>$. أي مقدار الإشترك بينهما. وهكذا فإن كانت $|u_n>$ تمثل أحوالاً مختلفة للنظام الذي تعبر عنه $|\psi>$ فإن $|a_n|^2$ سوف تمثل مقدار إحتمالية أن تكون $|\psi>$ في الحالة $|u_n>$.

والآن وباستخدام حقيقة أن المضروب القياسي للمتجه مع نفسه يساوي واحد صحيح يمكننا أستنباط معلومة جديدة بخصوص الأعداد a_n. حيث أن

$$\begin{aligned}<\psi|\psi>&=\sum_m\sum_n a_m^*a_n<u_m|u_n>=\sum_m\sum_n\delta_{mn}a_m^*a_n\\&=\sum_n|a_n|^2=1\end{aligned} \tag{519}$$

وهكذا نجد أن مجموع مربعات مُركّبات المتجه المقوَّم تساوي واحد صحيح. وهو تعبير عن حقيقة أن الإحتمالية الكلية ليكون النظام في أي من حالاته المختلفة هي واحد صحيح

فهو لا بد أن يكون في واحدة من الحالات الممكنة دون شك مهما اختلفت قيمة احتمالية كونه في تلك الحالات. والمثال التالي سيوضح هذا المفهوم.

شرط الإكتمال Completeness Condition

ما هو الشرط الرياضي الذي يجعلنا نقبل بأن مجموعة الأسس $\{|u_n>\}$هي مجموعة كاملة؟ لننظر في نشر المتجه $|\psi>$ لدينا من (5.17)

$$|\psi>=\sum_n a_n |u_n> \qquad (5.20)$$

ولدينا من (5.18)

$$a_n =<u_n|\psi>$$

بالتالي فإن

$$|\psi>=\sum_n <u_n|\psi>|u_n>=\sum_n |u_n><u_n|\psi> \qquad (5.21)$$

وهذا يعني أن

$$\sum_n |u_n><u_n|=1 \qquad (5.22)$$

يسمى هذا شرط الإكتمال مكتوباً بالصيغة المتجهية وبه نتأكد أن مجموعة الأسس التي استعملناها كاملة. وسنرى لاحقا أن المضروب المباشر $|u_n><u_n|$ يمثل إجراءً جديدا مهماً يسمى إجراء الإسقاط.

مثال: خذ نظاماً مؤلفا من خمسة متجهات أساسية متعامدة وكما يلي

$$|\psi>=\frac{1}{\sqrt{19}}|\phi_1>+\frac{2}{\sqrt{19}}|\phi_2>+\sqrt{\frac{2}{19}}|\phi_3>+\sqrt{\frac{3}{19}}|\phi_4>+\sqrt{\frac{5}{19}}|\phi_5>$$

إحسب معامل التقويم لهذا المتجه؟

ما إحتمالية أن يكون النظام في أي من الحالات الخمسة؟

الحل: (أ) نلاحظ أولاً أن $|\psi>$ غير مقومة. بالتالي يجب حساب $<\psi|\psi>$ بحيث تكون $|\psi>$ مقومة وهذا يعني أن

$$<N\psi|N\psi>=|N|^2\left(\frac{1}{19}+\frac{4}{19}+\frac{2}{19}+\frac{3}{19}+\frac{5}{19}\right)=\frac{15}{19}|N|^2=1$$

أي أننا يجب ان نضرب $|\psi>$ في $\sqrt{\frac{19}{15}}$ لكي يصبح المتجه مقوم.

(ب) إن إحتمالية أن يوجد النظام في أي من الحالات $|\phi_n>$ هو (لاحظ أننا نضع المقام لأن الدالة غير مقومة)

$$P(E_1)=\frac{|<\phi_1|\psi>|^2}{<\psi|\psi>}=\frac{|a_1|^2}{15/19}=\frac{1}{19}\times\frac{19}{15}=\frac{1}{15}$$

$$P(E_2)=\frac{|<\phi_2|\psi>|^2}{<\psi|\psi>}=\frac{|a_2|^2}{15/19}=\frac{4}{19}\times\frac{19}{15}=\frac{4}{15}$$

$$P(E_3)=\frac{|<\phi_3|\psi>|^2}{<\psi|\psi>}=\frac{|a_3|^2}{15/19}=\frac{2}{19}\times\frac{19}{15}=\frac{2}{15}$$

$$P(E_4)=\frac{|<\phi_4|\psi>|^2}{<\psi|\psi>}=\frac{|a_4|^2}{15/19}=\frac{3}{19}\times\frac{19}{15}=\frac{3}{15}$$

$$P(E_5)=\frac{|<\phi_5|\psi>|^2}{<\psi|\psi>}=\frac{|a_5|^2}{15/19}=\frac{5}{19}\times\frac{19}{15}=\frac{5}{15}$$

جد E_n حيث أن $|\phi_n>$ هي حالة مخصوصة لهاملتوني تكون بموجبه $H|\phi_n>=n\varepsilon_0|\phi_n>$

وإن $n=1,2,3,4,5$ وإن ε_0 لها وحدات طاقة.

الحل: لما كانت $E_n=<\phi_n|H|\phi_n>=n\varepsilon_0\ (n=1,2,3,4,5)$ فإن القياسات تعطي $E_1=\varepsilon_0, E_2=2\varepsilon_0, E_3=3\varepsilon_0, E_4=4\varepsilon_0, E_5=5\varepsilon_0$

وبالإحتماليات المبينة إعلاه.

إن معدل قيمة الطاقة للنظام هي

$$E = \sum_{1}^{5} P_j E_j = \frac{1}{15}\varepsilon_0 + \frac{8}{15}\varepsilon_0 + \frac{6}{15}\varepsilon_0 + \frac{12}{15}\varepsilon_0 + \frac{25}{15}\varepsilon_0 = \frac{52}{15}\varepsilon_0$$

وهذا القدر من الطاقة نفسه يمكن تحصيله من حساب القيمة المتوقعة للهاملتوني وكما يلي

$$E = \frac{<\psi | H | \psi>}{<\psi | \psi\}} = \frac{19}{15}\left(\frac{1}{19} + \frac{8}{19} + \frac{6}{19} + \frac{12}{19} + \frac{25}{19}\right)\varepsilon_0 = \frac{52}{15}\varepsilon_0$$

الفهم الفيزيائي لفضاء هلبرت

يمكننا الآن تقديم التطبيق الفيزيائي لفضاء هلبرت وما سبق من خصائصه الرياضية. إن المتجه المقصود في فضاء هلبرت هو ليس إلا ما كنا نسميه دالة الموجة في صياغات ميكانيك الكم بالبنية الموجية أي الميكانيك الموجي، لكنه الآن يسمى متجه الحالة State Vector، وهذا ما يعبر عن النظام المقصود. ويمكن تصور متجه الحالة على أنه مؤلف من عدة مُركِّبات هي مساقط هذا المتجه على الأسس المتعامدة لفضاء هلبرت. ونظراً لأن المتجهات التأسيسية لفضاء هلبرت هي أيضا متجهات حالة State Vectors أي تعبر عن أحوال مختلفة للنظام، ونظرا لأن هذه المتجهات متعامدة على بعضها فلا يوجد أحدها إلا بانتفاء الآخر، فقد قيل أن هذه المركبات التي تؤلف الحالة الكلية للنظام هي أحوال مختلفة للنظام يمكن أن يكون متلبساً واحدة منها في أي وقت من الأوقات. بمعنى أننا يصح أن نسأل: ما هي إحتمالية أن يكون النظام في الحالة $|u_n>$؟ ويكون الجواب عندئذ هو $|<u_n|\psi>|^2$. وهكذا تمثل $|a_n|^2$ إحتمالية لأن تكون $|\psi>$ في الحالة $|u_n>$.

ويضمر هذا الفهم حقيقة أن الكميات الفيزيائية وفق منظور ميكانيك الكموم لا تستقر على حال بل هي في تقلب دائم بين أحوالها الممكنة لها. وهي في تقلبها على تلك الأحوال

إنما تتلبس إحداها لقدر من الوقت يتناسب مع انسجام تلك الحالة مع الحالة العامة للنظام. ومن هنا يأتي مفهوم الإحتمالية في ميكانيك الكم.

تغيير الأسس والتحويلات الوحدوية Unitary Transformations

كما ذكرنا آنفا فإننا نستطيع وصف المتجه في منظومة إحداثية معينة بدلالة مركباته. لكننا حين نغير منظومة الإحداثيات فإن الأسس Basis تتغير وبالتالي فإن قيمة مركبات المتجه سوف تتغير، كما أن المتجه بمجموعه يتغير أيضاً. هذا النوع من التحويلات يسمى التحويلات الوحدوية Unitary Transformations. والسؤال هنا: ما هي علاقة الأسس الجديدة بالأسس القديمة؟

طالما أن الأسس هي متجهات فإننا يمكن أن ننشر الأسس القديمة $|u_n>$ مثلاً بدلالة الأسس الجديدة $|u'_m>$ وكما يلي

$$|u_n> = \sum_m <u'_m|u_n>|u'_m> = \sum_m U_{mn}|u'_m> \qquad (5.23)$$

من الواضح أن المعاملات U_{mn} هي مساقط الأسس القديمة على الجديدة. حيث أن

$$U_{mn} = <u'_m|u_n> \qquad (5.24)$$

أي أننا يمكن أن نكتب بالصيغة المصفوفية

$$|u_{old}> = U|u_{new}> \qquad (5.25)$$

ويمكننا الآن أن نثبت أن $U^{-1} = U^{\dagger}$ وكما يلي

$$<u_n|u_n> = <Uu'_n|Uu'_n> = <u'_n|U^{\dagger}U|u'_n> = 1 \qquad (5.26)$$

وهذا يعني أن $UU^{\dagger} = 1$ أي أن

$$.U^{-1} = U^{\dagger} \qquad (5.27)$$

تسمى المصفوفات التي تتمتع بهذه الخاصية مصفوفات وحدوية Unitary.

بالتالي يمكن أن نعيد كتابة المعادلة (5.25) كما يلي

$$|u_{new}>=U^{-1}|u_{old}>$$

أي أن

$$|u_n^{'}>=U^{\dagger}|u_n> \qquad (5.28)$$

إن التحويلات الوحدوية تمكننا من ربط أسس المنظومات بعضها مع بعض وإذا كانت لدينا أية كمية لا تغيرية تحت التحويلات الوحدوية فإنها ستكون غير معتمدة على المنظمات الإحداثية التي توصف فيها.

تحويل المتجهات

هكذا نجد أنه من خلال تغيير الأسس يمكن وصف المتجه في منظومة الإحداثيات الجديدة كما يلي

$$|\psi_{new}>=U^{\dagger}|\psi_{old}> \qquad (5.29)$$

وهكذا فإن

$$<\psi_{new}|=<\psi_{old}|U \qquad (5.30)$$

يمكننا أن نثبت الآن أن كثافة الإحتماليات تكون منحفظة تحت التحويلات الوحدوية.

$$<\psi_n|\psi_n>=|\psi_n|^2=<U\psi_n^{'}|U\psi_n^{'}>=<\psi_n^{'}|U^{\dagger}U|\psi_n^{'}>=|\psi_n^{'}|^2$$

وهذا يعني أن كثافة الإحتمالية تبقى على حالها حتى لو دورنا نظام الإحداثيات.

تحويل الإجراءات

تتغير الإجراءات بموجب هذه التحويلات الوحدوية كما يلي

$$A'_{mn} =< u'_m \mid \sum_j | u_j >< u_j | A \sum_k | u_k >< u_k | u'_n >= \sum_l U_{mj} A_{jk} U^*_{nk}$$

ومن هذا نستنتج أن الإجراءات تتحول بالصيغة التالية

$$A_{new} = UA_{old} U^{\dagger} \qquad (5.31)$$

كذلك فإن

$$A_{old} = U^{\dagger} A_{new} U \qquad (5.32)$$

الإجراءات في فضاء هلبرت Operators in Hilbert Space

يتغير المتجه في فضاء هلبرت من حال إلى آخر بالتأثير عليه بإجراء. وأغلب الإجراءات هي عمليات رياضية مثل نقل المتجه مكانيا أو زمانيا من نقطة إلى أخرى وهو بمثابة إجراء تحويل للمتجه Transformation وهذا الإجراء التحويلي يمكن أن يقابل عملية إنشاء لكمية فيزيائية مثلاً الزخم أو الطاقة كما سنرى لاحقاً. وعموما يمكن أن نكتب

$$A | \psi >=| \phi > \qquad (5.33)$$

أي أن فعل الإجراء A على المتجه $<\psi|$ هو تحويله الى متجه جديد هو $<\phi|$. فهاهنا المتجه الجديد $<\phi|$ نشأ عن إشتغال Operate الإجراء A عاملاً على المتجه $<\psi|$.
إن العلاقة بين $<\phi|$ و $<\phi|$ يحددها نوع الإجراء الذي اشتغل على $<\phi|$ وأنتج $<\phi|$. وتمثل الإجراءات في فضاء هلبرت بمصفوفات مربعة. أبعادها هي أبعاد فضاء هلبرت نفسه.

إن الهاملتوني أو إجراء الطاقة يعمل على إزاحة متجه الحالة زمانياً بمقدار تفاضلي.

وإن إجراء الزخم يعمل على إزاحة متجه الحالة مكانياً بمقدار تفاضلي.

وإن إجراء الزخم الزاوي يعمل على إزاحة متجه الحالة زاوياً بمقدار تفاضلي.

معادلة القيمة المخصوصة The Eigenvalue Equation

كيف لنا أن نستخلص من متجه الحالة أية معلومة فيزيائية عن حالة النظام؟ مثلا لدينا جسيم يقع في كمون معين ونعرف متجه الحالة State Vector أو متجهات الحالة الممكنة لهذا النظام فهل لنا أن نستخرج زخمه مثلا أو طاقته؟ نعم إن ذلك ممكن من خلال حساب القيمة المتوقعة للملحوظ الفيزيائي Physical Observable. لكن دعنا أولا ننظر في جانب آخر. لنعاود النظر في معادلة شرودنجر (3.19) وننظر اليها الآن في صياغتها بدلالة فضاء هلبرت لنجد أن

$$H|\psi> = i\hbar\frac{\partial|\psi>}{\partial t} \tag{5.34}$$

والآن يمكننا أن نسمي الإجراء H "**الهاملتوني**" لذكرى العالم الرياضياتي هاملتون وهذا هو إجراء الطاقة الميكانيكية الكلية للنظام.

المتجهات المخصوصة والقيم المخصوصة

إذا كان لدينا

$$A|\psi> = \alpha|\psi> \tag{5.35}$$

فإن المتجه $|\psi>$ يسمى عندئذ متجه مخصوص Eigenvector، وتسمى α القيمة المخصوصة Eigenvalue. ولقد اخترت هذه الترجمة لمعنى كلمة Eigen لأنها تعبر عن القصد بشكل جيد فإن المتجه $|\psi>$ في هذه الحالة مخصوص بالإجراء A وكذلك القيمة α فهي مخصوصة بالمتجه $|\psi>$ عندما يعمل عليه الإجراء A وليس غيره.

من الملاحظ أن ما هو متجه مخصوص لإجراء معين لا يكون بالضرورة متجها مخصوصا لإجراء آخر. لكن يمكن أن تكون هنالك هنالك متجهات مخصوصة مختلفة تخضع للإجراء نفسه.

مثال (1): لو كان $A = \frac{\partial}{\partial x}$ وكانت $|\psi> = \sin kx$

فإن

$$A|\psi>=k\cos kx$$

على حين أن

$$A^2|\psi>=-k^2\sin kx=-k^2|\psi>$$

أي أن $|\psi>$ هنا هي متجه مخصوص للإجراء $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ بقيمة مخصوصة مقدارها $-k^2$ لكنها ليست متجه مخصوص للإجراء $\frac{\partial}{\partial x}$.

وهذا مثال آخر لتشغيل الإجراء على دالة أسية

مثال (2): إذا كان $|\phi>=e^{kx}$ فإن

$$A|\phi>=ke^{kx}=k|\phi>$$

أي أنه متجه مخصوص للإجراء $\frac{\partial}{\partial x}$ بقيمة مخصوصة مقدارها k. كذلك فإن

$$A^2|\phi>=k^2|\phi>$$

بالتالي فإن المتجه $|\phi>$ كما هو واضح متجه مخصوص لجميع الإجراءات التفاضلية على x، لكن بقيم مخصوصة مختلفة طبعاً.

القيم المتوقعة Expectation Values

كما ذكرتُ آنفا فإن القيمة المتوقعة لأي ملحوظ فيزيائي Physical Observable هي معدل القيم التي يمكن أن يأخذها ذلك الملحوظ على مدى جميع القيم الممكنة له خلال تقلبه على الأحوال التي يمكن أن يكون عليها النظام. وهذه القيم يحددها النظام الفيزيائي نفسه بموجب حلول معادلة الحركة. وحين نقوم بعملية قياس أي ملحوظ فيزيائي فإننا إنما نؤثر بالإجراء المقابل لذلك الملحوظ على متجه حالة النظام، أي

$$A|\psi>=|\phi>$$

وبهذا يكون النظام قد صار الى حالة جديدة هي $|\phi>$ وتعرف قيمة الملحوظ المقابل لـA بأنها مقدار التطابق بين $|\psi>$ و $|\phi>$ أي

$$<A>=<\psi|\phi>=\int \psi^*(x)\phi(x)dx \qquad (5.37)$$

أي يكون

$$<A>\equiv\int \psi^*(x)A\psi(x)dx$$

فإذا ما كانت $|\psi>$ هي متجه مخصوص للإجراء A فإن لدينا

$$A|\psi>=\alpha|\psi>$$

وإذا كانت $|\psi>$ مقومة فإن هذا يكون

$$<A>\equiv\int \psi^*(x)A\psi(x)dx=\alpha\int \psi^*(x)\psi(x)dx=\alpha \qquad (5.38)$$

أي أن القيمة المتوقعة للملحوظ ستأتي مساوية للقيمة المخصوصة للإجراء المقابل لذلك الملحوظ في حالة أن يكون المتجه حالة مخصوصة لذلك الإجراء.

حل معادلة القيمة المخصوصة

إن حل معادلة القيمة المخصوصة ضروري إيجاد المتجه $|\psi>$ ولإيجاد القيم المخصوصة الممكنة. ويجري الحل عادة بالطرق المصفوفية التقليدية حيث يتم إنشاء المحددة التي تحصر القيم الممكنة لعناصر مصفوفة الإجراء. وكما نعرف يكون علينا حل المعادلة التالية

$$\det|A_{mn}-\alpha\delta_{mn}|=0 \qquad (5.36)$$

ومنها نجد القيم المخصوصة الممكنة والتي هي جذور المعادلة أعلاه. ومن ثم ننشئ المتجهات المخصوصة الممكنة بحسب عدد القيم المخصوصة وفيما يلي مثال على ذلك.

مثال: إذا كانت $M|\psi>=\lambda|\psi>$ ، حيث أن

$$M=\begin{pmatrix}0 & -i & 0\\ i & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

جد القيم المخصوصة ثم جد المتجهات المخصوصة للإجراء M.

الحل:

بالصيغة المصفوفية يكون لدينا

$$\begin{pmatrix}0 & -i & 0\\ i & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\end{pmatrix}$$

والمعادلة المطلوب حلها هي

$$\det\begin{pmatrix}-\lambda & -i & 0\\ i & -\lambda & 0\\ 0 & 0 & -\lambda\end{pmatrix}=0$$

وهذه تعطينا

$$-\lambda\begin{vmatrix}-\lambda & 0\\ 0 & -\lambda\end{vmatrix}-(-i)\begin{vmatrix}i & 0\\ 0 & -\lambda\end{vmatrix}+0=0$$

بمعنى أنه يكون لدينا $-\lambda^3+\lambda=0$، وحلول هذه المعادلة هي $\lambda=\pm1 \text{ and } \lambda=0$.

ويمكننا الآن إيجاد المتجهات المخصوصة بالتعويض في (5.23a) عن أقيام λ فيكون لدينا لحالة $\lambda=1$

$$\begin{pmatrix}-1 & -i & 0\\ i & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\end{pmatrix}=0$$

وهذا يعني أن

$$\begin{aligned} -\psi_1 - i\psi_2 &= 0 \\ i\psi_1 - \psi_2 &= 0 \\ \psi_3 &= 0 \end{aligned}$$

ولو فرضنا أن $\psi_1 = 1$ فإن $\psi_2 = i$ وإن $\psi_3 = 0.$. وهكذا نتمكن من أيجاد المتجه المخصوص بهذه الحالة وتلك القيمة المخصوصة وهو

$$|u_1> = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$$

حيث أن c_1 هو ثابت التقويم للمتجه. ويمكن إيجاده أيضا بفرض شرط التقويم عليه وكما يلي

$$<u_1|u_1> = 1 \Rightarrow c_1^* c_1 \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow |c_1|^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

وهكذا يصبح المتجه المقوم هو $|u_1> = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$.

والآن نجد المتجه ذي القيمة المخصوصة $\lambda = 0$ حيث لدينا

$$\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = 0$$

وهذا يعني أن

$$\begin{aligned} -i\psi_2 &= 0 \\ i\psi_1 &= 0 \\ \psi_3 &= 1 \end{aligned}$$

بحيث يكون

$$|u_0>=c_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

ومن السهل أيجاد ثابت التقويم كما في المرة السابقة

$$<u_0|u_0>=1 \Rightarrow c_2^*c_2\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=1 \Rightarrow |c_2|^2=1 \Rightarrow c_2=1$$

بحيث يكون المتجه المخصوص المقوم هو $|u_0>=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

وهكذا نجد المتجه الثالث للحالة $\lambda=-1$ من المعادلة المصفوفية

$$\begin{pmatrix}1 & -i & 0\\ i & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\end{pmatrix}=0$$

والتي تفضي إلى

$$\begin{aligned}\psi_1-i\psi_2&=0\\ i\psi_1+\psi_2&=0\\ \psi_3&=0\end{aligned}$$

بحيث يكون لدينا $|u_{-1}>=c_3\begin{pmatrix}1\\-i\\0\end{pmatrix}$ ومن السهل أن نجد أن $c_3=\frac{1}{\sqrt{2}}$. وهكذا يكون $|u_{-1}>=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-i\\0\end{pmatrix}$. وبهذا يكتمل لدينا المجموعة الكاملة للمتجهات المخصوصة المقمة للإجراء الذي أعطي في المسألة.

تقطير المصفوفات Matrix Diagonalization

تحتل عملية تقطير المصفوفات أهمية بالغة في ميكانيك الكموم وذلك لأن مصفوفات الهاملتونيات المقطّرة تدلنا على القيم المخصوصة للهاملتوني مباشرة بمجرد النظر الى العناصر القطرية فهذه العناصر هي القيم المخصوصة بذاتها. علاوة على ذلك وبصورة عامة فإن التعامل الحسابي مع المصفوفات المقطرة أسهل كثيرا من التعامل مع المصفوفات الكاملة.

يتم تقطير المصفوفات بتغيير الأسس التي توصف فيها المتجهات والإجراءات. وفي ميكانيك الكموم يتم هذا من خلال التحويلات الوحدوية Unitary Transformations على الأسس الأصلية. ويتم تحصيل عناصر مصفوفة التحويلات الوحدوية من خلال حساب المتجهات المخصوصة للمصفوفة المراد تقطيرها. ومن ثم يتم جمع هذه المتجهات في أعمدة تؤلف مصفوفة مربعة هي المصفوفة الوحدوية U. وعندئذ نكتب مصفوفة الهاملتوني المقطرة كما يلي

$$H^{'} = U^{\dagger} H U \qquad (5.39)$$

مثال: حول المصفوفة M الواردة في المثال السابق إلى مصفوفة قطرية.

وجدنا في المثال السابق أن هنالك ثلاث متجهات مخصوصة وهذه هي

$$|u_1> = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ i\\ 0\end{pmatrix} |u_{-1}> = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -i\\ 0\end{pmatrix} ،|u_0> = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix} ،$$

ومن هذه المتجهات سوف نؤلف المصفوفة الوحدوية U

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ i & 0 & -i\\ 0 & \sqrt{2} & 0\end{pmatrix}$$

وهكذا نجد أن المصفوفة المقطرة هي

$$M' = U^{\dagger}MU = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ i & 0 & -i \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

وهكذا أصبحت المصفوفة قطرية.

أسئلة مفاهيمية حول الفصل الخامس

1. ما الذي يحصل على المتجه $|\psi(x)>$ عند إشتغال إجراء الزخم عليه؟
2. ما الذي يحصل على المتجه $|\psi(x,t)>$ عند إشتغال الإجراء $\partial/\partial t$ عليه؟
3. عند قياس ملحوظ معين لحالة نظام فما هي العواقب المترتبة على هذا القياس؟
4. ما الذي يحصل لكرة عند تشغيل إجراء التدوير حول محورها عليها؟
5. ما التحويلات الوحدوية؟ وما فائدتها؟
6. ما الكمية التي تنحفظ تحت فعل التحويلات الوحدوية؟
7. ما أهمية تقطير المصفوفات؟

مسائل الفصل الخامس

س1) إذا كان لديك متجه الحالة $|\psi>=\frac{1}{\sqrt{3}}|\phi_1>+\frac{2}{3}|\phi_2>+\frac{\sqrt{2}}{3}|\phi_3>$

برهن أن هذا المتجه مقوم.

ما هي إحتمالية أن يكون النظام في الحالة $|\phi_2>$

إذا كان في النظام جمع من الجسيمات عددها 810 فكم منها تتوقع أن يكون في الحالة $|\phi_1>$ وكم منها في $|\phi_2>$ وكم منها في الحالة $|\phi_3>$.

س2) أوجد القيم المخصوصة والمتجهات المخصوصة المقومة للإجراء التالي

$$M=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2i & i & 2i \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

س3) أوجد القيم المخصوصة والمتجهات المخصوصة المقومة للإجراء التالي

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

س4) بين أن المصفوفة التالية ليس لها قيم مخصوصة حقيقية إلا لقيم معينة من θ ما هي؟ ثم جد المصفوفة S التي تقطر T ثم حقق ذلك.

$$T = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

س5) إذا كان لديك متجهين بالوصف المصفوفي التالي

$$|\psi>= \begin{pmatrix} 5i \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad |\phi>= \begin{pmatrix} 3 \\ 8i \\ -9i \end{pmatrix},$$

جد $|\psi>^*$ و $<\psi|$.

هل أن $|\psi>$ مقومة؟ فإن لم تكن قومها.

هل أن $|\psi>$ و $|\phi>$ متعامدتين؟

س6) برهن أن أثر المصفوفة المربعة التي تمثل إجراءً يكون غير معتمد على الأسس التي أقيمت عليها المصفوفة.

س7) برهن أن كثافة الإحتمالية هي كمية منحفظة تحت فعل التحويلات الوحدوية.

الفصل السادس

الطرق الإجرائية في ميكانيك الكموم

في هذا الفصل سنعرض لطريقة التعامل بالإجراءات في صياغات وحسابات ميكانيك الكموم. وسنتعرف على صفات الإجراءات والعلاقات بين الإجراءات المختلفة.

الإجراءات الخطية والإجراءات اللاخطية

يمكن تقسيم الإجراءات إلى نوعين: خطية ولاخطّية، فأما الخطية Linear منها فهي تلك التي تتبع قواعد البنية الخطية في العلائق والمعاملات وكما مبين آنفا. مثال ذلك الإجراءات التفاضلية والتكاملية، مثلاً $\frac{d}{dt}(x+y)=\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}$.

أما الإجراءات اللاخطية non-linear فإنها لا تخضع لقواعد البنية الخطية في العلائق والمعاملات. مثال ذلك إجراء اللوغاريتم الطبيعي حيث نعلم أن

$$\ln(x+y)\neq\ln x+\ln y$$

وهذا يعني أن إجراء اللوغاريتم يفتقد أحد خواص البنية الخطّية، مما يجعله لا خطّياً.

عموما فإن جميع الإجراءات التي تقابل مقادير فيزيائية تكون خطية دون شك. لذلك يمكن القول أن نظرية الكموم هي نظرية خطيّة Linear Theory.

الهاملتوني

الهاملتوني هو أهم إجراء في ميكانيك الكم وذلك لأنه يشتمل على مجموع الطاقة الميكانيكية للنظام. فإن كان النظام لانسبويا فإن الهاملتوني يكون مجموع الطاقة الحركية والطاقة الكامنة (أو طاقة الوضع في أغلب الحالات) وهذا هو

$$\hat{H}=\frac{\hat{p}^2}{2m}+\hat{V}$$

فإذا كانت $\hat{V}$ معتمدة على الزمن كان الهاملتوني معتمداً على الزمن وبالتالي نستخدم معادلة شرودنجر المعتمدة على الزمن. أما إذا كان $\hat{V}$ غير معتمد على الزمن فإننا نستخدم

معادلة شرودنجر غير المعتمدة على الزمن. إذن فإن الطاقة الكامنة هي التي تحدد ما ستصير اليه صيغة الهاملتوني الخاصة بالنظام. مثلا هاملتوني ذرة الهيدروجين هو

$$\widehat{H}=\frac{\widehat{p}^{2}}{2m}-\frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}}\frac{e^{2}}{r}$$

ولو كان لدينا أي كمون آخر فيمكننا تعويضه في الهاملتوني هذا. مثلا لو أن لدينا جسيم يتحرك في مائع ويعاني من مقاومة تتناسب طرديا مع مربع السرعة فعندئذ يكون لدينا

$$\widehat{H}=\frac{\widehat{p}^{2}}{2m}-C\mathrm{v}^{2}=\frac{\widehat{p}^{2}}{2m}-C\frac{\widehat{p}^{2}}{m^{2}}=\left(\frac{C}{m^{2}}-\frac{1}{2m}\right)\hbar^{2}\frac{d^{2}}{dx^{2}}$$

وبستخدام هذا الهاملتوني يمكن أن نشكل معادلة الحركة لمثل هذا الجسيم ونحلها ثم نطبق الشروط الحدودية عليها ونستخرج حالات النظام الممكنة من خلال القيم الممكنة للثابت C. (أنظر المسائل نهاية الفصل)

تمثيل الإجراءات

قلنا آنفا أن المتجهات في فضاء هلبرت في وصف من أوصافها هي مصفوفات عمودية على حين تكون قرائنها هي مصفوفات أفقية. فما هو الوصف المصفوفي للإجراءات؟

لو رجعنا إلى معادلة القيمة المخصوصة (5.22) وحسبنا القيمة المتوقعة للإجراء A مثلا لوجدناها

$$<\psi|A|\psi>=\alpha \qquad (6.1)$$

وبما أن $<\psi|$ هي مصفوفة عمودية و $|\psi>$ هي مصفوفة أفقية على حين أن α هي عدد فإن A لابد أن تكون مصفوفة مربعة أو عدد لكي تصح المعادلة في طرفيها. وبما A ليس عددا فإنه دون شك مصفوفة مربعة.

من جانب آخر فإن الصيغة

$$<\psi_{m}|A|\psi_{n}>=A_{mn} \qquad (6.2)$$

تعبر عن العناصر المصفوفية للإجراء A. أي أن الإجراء بالصيغة المصفوفية هو عبارة عن مصفوفة مربعة. وفي المصفوفة المربعة تكون العناصر القطرية هي القيم المخصوصة للإجراء. وهذه خاصية مفيدة جداً إذ يمكننا التعرف على القيم المخصوصة للهاملتوني حال تحصيلنا لمصوفته القطرية. من هنا كانت عملية تقطير Diagonalization المصفوفات المربعة ذات أهمية بالغة في الحسابات الكمومية. وهذا ما سوف نناقشه لاحقاً.

الإجراءات الهرمايتية Hermitian Operators

وهذه إجراءات خاصة تتمتع بصفة تجعلها ذات مضمون مميز في ميكانيك الكموم. وقد سميت على إسم الرياضياتي هرمايت. يعرَّف الإجراء الهرمايتي بأنه أي إجراء يتمتع بالصفة التالية

$$A^{\dagger} = A \qquad (6.3a)$$

أي أن القرين المعقد لمصفوفة الإجراء المبدولة هو الإجراء نفسه دون تغيير.

وهذا يعني أن

$$<\psi | A\psi >=< A\psi | \psi > \qquad (6.3b)$$

وكما قلت فإن لهذه الخاصية مضامين مهمة. والآن دعنا نثبت بعض المبرهنات المفيدة في ميكانيك الكموم بخصوص المتجهات المخصوصة والقيم المخصوصة للإجراءات الهرمايتية.

مبرهنة (1)

إن القيم المخصوصة للإجراءات الهرمايتية هي قيم حقيقية دائماً.

البرهان: لنأخذ $|\psi>$ متجهاً مخصوصاً للإجراء الهرمايتي A وبقيمة مخصوصة α. أي أن

$$A|\psi >= \alpha |\psi > \qquad (6.4)$$

والآن دعنا ننقل الإجراء من موقعه مؤثرا في (البرا) إلى موقع يكون فيه مؤثرا في (الكت) وكما يلي

ولكن لما كان $A^\dagger = A$ فإن

$$<\psi|A|\psi> = <A^\dagger\psi|\psi> = <A\psi|\psi>$$

وهذا يعني

$$<\psi|\alpha\psi> = \alpha<\psi|\psi> = <\alpha\psi|\psi> = \alpha^*<\psi|\psi>$$

مما ينتج عنه أن

$$\alpha = \alpha^* \quad (6.5)$$

بالتالي فإن القيم المخصوصة للإجراءات الهرمايتية ستكون حقيقية دون شك، وهو المطلوب.

لما كانت الكميات الفيزيائية يجب أن تكون دوما قابلة للقياس measurable فإنها يجب أن تكون حقيقية real وبالتالي فإنها يمكن أن تكون أقياما مخصوصة لإجراءات هرمايتية. بمعنى أن الإجراءات الهرمايتية تقابل ملحوظات فيزيائية بالضرورة.

مبرهنة (2)

إذا كانت المتجهات المخصوصة لإجراء هرمايتي معين ذات قيم مخصوصة مختلفة فإن تلك المتجهات المخصوصة تكون متعامدة على بعضها البعض.

البرهان: لنفرض أن لدينا إجراء هرمايتي A، ولتكن $|\psi_1>$ و $|\psi_2>$ متجهين مخصوصين لهذا الإجراء بقيمتين مخصوصتين مختلفتين هما α_1 و α_2 أي أن

$$A|\psi_1> = \alpha_1|\psi_1>$$
$$A|\psi_2> = \alpha_2|\psi_2> \quad (6.6)$$

وبما أن A هو إجراء هرمايتي بالفرض فإن

$$<\psi_2|A|\psi_1> = <A^\dagger\psi_2|\psi_1> = <A\psi_2|\psi_1>$$

وهذا يعني أن

$$\alpha_1 < \psi_2 | \psi_1 >= \alpha_2^* < \psi_2 | \psi_1 >= \alpha_2 < \psi_2 | \psi_1 >$$

وذلك لأن $\alpha^*{}_2 = \alpha_2$ لكونها قيمة مخصوصة حقيقية حكما بموجب المبرهنة (1) أعلاه. لذلك فإن هذا يعني أن

$$(\alpha_2 - \alpha_1) < \psi_2 | \psi_1 >= 0$$

وبما أن $\alpha_2 \neq \alpha_1$ بالفرض، فإن هذا يعني أن

$$< \psi_2 | \psi_1 >= 0 \qquad (6.7)$$

ما يعني أن $|\psi_1>$ و $|\psi_2>$ متعامدين على بعضهما، وهو المطلوب.

الإجراءات الهرمايتية المضادة Anti-Hermitian Operators

إلى جانب الإجراءات الهرماتية توجد إجراءات هرمايتية مضادة. وهذه تتصف بالصفة التالية

$$A^\dagger = -A$$

ويمكن إثبات أن القيم المخصوصة لإجراءات الهرمايتية المضادة تكون كميات معقدة دائماً. (أنظر المسائل)

إجراء الإسقاط Projection Operator

وهذا واحد من الإجراءات الأساسية والمهمة في ميكانيك الكموم فهو الذي يحدد كيفية تغير حالة النظام بعد إجراء عملية قياس على أحد ملحوظاته Observables طبقا للفرضية الثالثة لميكانيك الكموم التي ذكرناها في الفصل الخامس من هذا الكتاب. ولإجراء الإسقاط مضمون مهم يتمثل بالحفاظ على القيمة المخصوصة على حالها دون تغيير مهما تكررت مرات عمله. ومن خلاله يمكن تبرير حصولنا على نفس القيمة المخصوصة في عملية قياس

تالية لنفس الملحوظ على الرغم من أن حالة النظام تكون في الواقع متقلبة على الأحوال الممكنة. ويمكن تمثيل إجراء الإسقاط بالصيغة التالية

$$P_n = |\psi_n >< \psi_n|$$

ومن السهل ملاحظة أن

$$\begin{aligned} P_n|\psi> &= |\psi_n >< \psi_n|\psi> \\ &= a_n|\psi_n> \end{aligned}$$

أي أن هذا الإجراء يسقط المتجه $|\psi>$ على الحالة $|\psi_n>$. كما نلاحظ أن

$$\begin{aligned} P_n^2|\psi> &= |\psi_n >< \psi_n|\psi_n >< \psi_n|\psi> = |\psi_n >< \psi_n|\psi> \\ &= P_n|\psi> \end{aligned}$$

وهذا يعني أن

$$P_n^2 = P_n$$

بمعنى أن القيمة المخصوصة لإجراء الإسقاط هي ± 1.

ومن المفيد أن نعرف أن إجراء الإسقاط هرمايتي. كما يمكن وبسهولة أن نثبت أن

$$\sum_n P_n = \sum_n |\psi_n >< \psi_n| = 1$$

ولو أننا أسقطنا الرمز ψ فإننا يمكن أن نكتب

$$\sum_n P_n = \sum_n |n >< n| = 1$$

إن $|\psi >< \psi|$ هو مصفوفة مربعة وإن $\sum_n |n >< n| = 1$ يمثل إجراء الوحدة Unit Operator وهذه العلاقة تسمى علاقة الإكتمال Completeness relation. ويمكننا إستعمال هذا الإجراء لفتح أي متجه بواسطته. مثلاً: إذا كان لدينا

علاقات التبادل Commutation Relations

قلنا أن الإجراءات هي صيغ رياضية تعمل على المتجهات (الدوال) في فضاء هلبرت وتعمل على تحويلها إلى متجهات (دوال) أخرى. وقلنا أن المتجه الذي يسفر تحويله عن ضربه بعدد معقد فقط (القيمة المخصوصة) دون أن يحصل معه تغيير كبير في بنيته سيكون متجه مخصوص لذلك الإجراء. وكذلك رأينا أن هنالك إجراءات خاصة تكون القيم المخصوصة لها حقيقية. لكن الإجراءات حين تجري على الدوال المخصوصة وغير المخصوصة فهي عمليات وهنا يظهر السؤال التالي: هل أن تشغيل إجراء معين على متجه ثم تشغيل إجراء آخر بعده يؤدي إلى النتيجة نفسها فيما إذا شغلنا الإجراء الثاني أولاً ثم أعقبناه بتشغيل الإجراء الأول بعده؟ بكلمات أخرى: هل أن الإجراءات تبادلية؟

نعلم أن الأعداد هي تبادلية مثلا 6×5 =5×6 ولكن هل هذا ممكن في حالة الإجراءات؟ والجواب حقا أن هنالك إجراءات تبادلية وهنالك إجراءات غير تبادلية أو عكس تبادلية. فالإجراءات التبادلية هي التي تحقق الشرط

$$\hat{A}\hat{B}|\psi>=\hat{B}\hat{A}|\psi>$$

أي أننا يمكن أن نكتب

$$[\hat{A},\hat{B}]|\psi>=\left(\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}\right)|\psi>=0$$

وبالتالي يمكن أن نقول أن

$$[\hat{A},\hat{B}]=\left(\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}\right)=0$$

ونقول أن $\hat{A}$ و $\hat{B}$ هما إجراءان تبادليان Commuting Operators . مثلا إذا كان $\hat{A}=\frac{\partial}{\partial x}$ وكان $\hat{B}=\frac{\partial}{\partial t}$ فإنهما تبادليان دون شك. لكن إذا كان $A=x$ وكان $\hat{B}=\hat{p}=-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ فإن:

$$\begin{aligned}[\hat{x},\hat{p}]|\psi> &=\left(-i\hbar x\frac{\partial}{\partial x}+i\hbar\frac{\partial}{\partial x}x\right)|\psi> \\ &=i\hbar|\psi>\end{aligned} \tag{6.8}$$

وهذا يعني أن

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar.\hat{1} \qquad (6.9)$$

وبهذا نقول أن الإجرائين p وx هما غير متبادلين Non-commuting operators. وهذه نتيجة مهمة جدا لها معناها الفيزيائي وعواقبها بخصوص الدوال المخصوصة التابعة للإجرائين اللامتبادلين والتي ستتضح لاحقاً.

وكمثال ثاني على الإجراءات غير المتبادلة لو أخذنا $\hat{A} = t$ وكان $\hat{B} = \hat{H} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ ، فإننا نجد أن

$$[t, \hat{H}] = -i\hbar.\hat{1} \qquad (6.10)$$

بمعنى أن الهاملتوني والزمن غير متبادلين.

المضامين الفيزيائية لتبادل الإجراءات

هنالك مسألتان ينبغي أن نثبتهما هنا وهما:

إن الإجراءات غير المتبادلة تقابل عمليات قياس متزامنة تتضمن قدرا من اللادقة للملحوظات الفيزيائية التي تقابلها. يعني، مثلاً، أن قياس الزخم الخطي p والموقع أنياً يتضمن وجود قدر من اللادقة المتلازمة في كل من p وx.

إن عدم تبادل إي عدد من الإجراءات يعني أننا لا يمكن ان نجد دوالاً مخصوصة متزامنة Simultaneous Eigenfunctions مشتركة لها .

والعكس صحيح فإن الملحوظات المقابلة لإجراءات متبادلة يمكن قياسها آنياً بدقة لامتناهية أي أن مبدأ اللادقة لهيزنبرغ لا يعمل في هذه الحالات، فضلا عن أن بالإمكان تحصيل دوال متزامنة مخصوصة لها.

إثبات المضمون الأول:

لغرض اثبات الفقرة (1) أعلاه ينبغي أن نقدم المبرهنة التالية:

مبرهنة (1): إذا كان لدينا إجرائين $\hat{A}$ و $\hat{B}$ غير متبادلين بحيث يكون

$$[\hat{A},\hat{B}]=i\hat{C} \qquad (6.11)$$

وكان $\hat{C}$ هو إجراء ثالث أيضا، فإن

$$\Delta A\Delta B\geq\frac{<\hat{C}>}{2} \qquad (6.12)$$

البرهان: دعنا نعرف الإجراء

$$\hat{D}=\hat{A}+\alpha\hat{B}+i\beta\hat{B},$$

حيث أن α وβ هي أعداد حقيقية عشوائية. وبما أن المضروب $<D\psi|D\psi>$ هو عدد موجب فإننا يمكن أن نكتب

$$<\hat{D}\psi|\hat{D}\psi>=<\hat{A}^2>+(\alpha^2+\beta^2)<\hat{B}^2>+\alpha<\hat{C}^{'}>-\beta<\hat{C}>\geq 0$$

حيث أن

$$\hat{C}^{'}=\hat{A}\hat{B}+\hat{B}\hat{A},$$

ويسمى ضديد التبادل Anticommutator. وإذا كان $\hat{B}|\psi>\neq 0$ فإننا يمكن أن نعيد كتابة المعادلة أعلاه كما يلي

$$<\hat{D}\psi|\hat{D}\psi>=<\hat{A}^2>+<\hat{B}^2>\left(\alpha+\frac{1}{2}\frac{<\hat{C}^{'}>}{<\hat{B}^2>}\right)^2+<\hat{B}^2>\left(\beta-\frac{1}{2}\frac{<\hat{C}>}{<\hat{B}^2>}\right)^2$$
$$-\frac{1}{4}\frac{<\hat{C}^{'}>^2}{<\hat{B}^2>}-\frac{1}{4}\frac{<\hat{C}>^2}{<\hat{B}^2>}\geq 0$$

إن هذه العلاقة نافذه لجميع قيم α و β بالتالي يمكننا اختار القيم بما يجعل الأقواس المربعة في العلاقة أعلاه صفراً وهكذا نتمكن من اعادة كتابة العلاقة بالصورة التالية

$$<\hat{A}^2><\hat{B}^2>\geq\frac{1}{4}\left(<\hat{C}>^2+<\hat{C}^{'}>^2\right)\geq\frac{<\hat{C}>^2}{4}$$

ولكننا نعرف ان

$$(\Delta A)^2 =<\hat{A}^2>-<\hat{A}>^2, \quad (\Delta B)^2 =<\hat{B}^2>-<\hat{B}>^2$$

فإنه وفي الحالة الخاصة التي تكون فيها $<A>=<B>=0$ فإن

$$(\Delta A)^2(\Delta B)^2 \geq \frac{<\hat{C}>^2}{4}$$

وهو المطلوب.

لغرض إثبات المضمون الثاني فإن علينا إثبات المبرهنة التالية:

مبرهنة (2): إذا كان لدينا

$$\begin{aligned}\hat{A}|u>&=a|u>.\\ \hat{B}|u>&=b|u>.\end{aligned} \qquad (6.13)$$

حيث أن a و b هما قيمتان مخصوصتان للإجرائين $\hat{A}$ و $\hat{B}$ على التوالي، فإن

$$\hat{A}\hat{B}|u>=ba|u>=ab|u>$$
$$\hat{B}\hat{A}|u>=ab|u>.$$

وهذا يعني أن

$$(\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A})|u>=0,$$

وبالتالي فإن

$$\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}=[\hat{A},\hat{B}]=0,$$

وهكذا يتضح أن الإجرائين $\hat{A}$ و $\hat{B}$ متبادلين والمتجه المخصوص المتزامن لهما هو $|u>$
.

يمكننا أيضا أن نثبت أنه إذا توفر لدينا إجرائين متبادلين $\hat{A}$ و $\hat{B}$ فإن بالإمكان أن نجد متجه مخصوص متزامن لهما معاً. فإذا كان لدينا

$$\hat{A}\hat{B}|u>=a\hat{B}|u>,$$

وهذا يعني أن $\hat{B}|u>$ هو متجه مخصوص للإجراء A. مما يسمح لنا بالقول أنها تتناسب مع $|u>$ وليكن قيمتها هي $b|u>$. مثلاً بالتالي نتمكن من أن نكتب

$$AB|u>=ab|u>. \qquad (6.14)$$

وهذا يعني أن $|u>$ هي متجه مخصوص متزامن لكل من الإجرائين $\hat{A}$ و $\hat{B}$، وهو المطلوب.

أما إذا كان $\hat{A}$ و $\hat{B}$ غير متبادلين فإنه لا يمكن أيجاد دالة متزامنة لكليهما.

الدوال الإجرائية Operator Functions

يمكن تأليف دوال إجرائية من إجراء أو أكثر بصياغتها في علاقات جبرية. وهذه الدوال يمكن معاملتها كإجراءات أيضاً. كما يمكن صياغة علاقات مفيدة من خلالها. مثلاً لوكانت F(A) هي دالة للإجراء A فإن بالإمكان استخدام متسلسلة تايلور لنشر هذه الدالة وكما يلي

$$F(A)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n A^n$$

وفي ميكانيك الكموم تحصل لنا الدالة الإجرائية e^{cA} والتي يمكن نشرها كما يلي

$$e^{cA}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c^n}{n!}A^n=1+cA+\frac{c^2}{2!}A^2+\frac{c^3}{3!}A^3+....$$

خصائص مفيدة

إذا كان $[A,B]=0$ فإن $[B,F(A)]=0$ وعلى وجه الخصوص فإن

$[G(A),F(A)]=0$ و $[A^n,F(A)]=0$ و $[A,F(A)]=0$

الخواص الهرمايتية

إن القرين الهرمايتي للدالة الإجرائية هو

$$[F(A)]^\dagger = F^*(A^\dagger)$$

لاحظ أنه إذا كان A إجراء هرمايتيا فليس بالضرورة أن تكون الدالة الإجرائية التي تتألف منه دالة إجرائية هرمايتية ما لم تكن هي في الأصل دالة حقيقية. مثلاً

$$\left(e^A\right)^\dagger = e^{A^\dagger}, \quad \left(e^{iA}\right)^\dagger = e^{-iA^\dagger}, \quad \left(e^{iaA}\right)^\dagger = e^{-ia^* A^\dagger}$$

معكوس الإجراء

لكل إجراء من الإجراءات معكوس Inverse يكون حاصل ضربه مع الإجراء الأصلي إجراء الوحدة Unit Operator.

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

ومن الخصائص أن

$$\frac{A}{B} = AB^{-1}$$

كذلك فإن

$$\left(ABC\right)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}, \quad \left(A^n\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^n.$$

كذلك فإن

$$\left(ABC\right)^\dagger = C^\dagger B^\dagger A^\dagger, \quad \left(A^n\right)^\dagger = \left(A^\dagger\right)^n.$$

إن الشرط الأساسي لوجود الإجراء المعكوس أن تكون مصفوفته غير مفردنة non-singular. وتكون القيمة المخصوصة لمعكوس الإجراء كما يلي:

فإذا كان $|\psi>$ متجه مخصوص للإجراء A وبقيمة مخصوصة a فإن

$$A^{-1}A|\psi> = |\psi> = A^{-1}\left(A|\psi>\right) = aA^{-1}|\psi>$$

أي أن

$$A^{-1}|\psi>=\frac{1}{a}|\psi>$$

الإجراءات الوحدوية Unitary Operators

وهي نفسها مولدات Generators التحويلات الوحدوية وهي من التحويلات المهمة في الفيزياء. والخاصية الأساسية هنا هي أن يكون معكوس الإجراء مساويا لقرينه الهرمايتي

$$U^{\dagger}=U^{-1},$$

بمعنى أن

$$UU^{\dagger}=U^{\dagger}U=I.$$

التوالد والحالات المتوالدة Degeneracy and Degenerate States

إذا توفر النظام الفيزيائي على أكثر من حالة لها نفس الطاقة فإنه يسمى نظاماً متوالداً Degenerate System وهذه الحالات تسمى حالات متوالدة Degenerate States في الطاقة . والعلاقة بين الحالات المتوالدة والمتجهات (الدوال) المخصوصة المتزامنة علاقة وطيدة. فمثلا إذا كان لدينا

$$\begin{aligned} A|u_a^{(1)}> &= a|u_a^{(1)}> \\ A|u_a^{(2)}> &= a|u_a^{(2)}> \end{aligned} \qquad (6.15a)$$

فإن $|u_a>$ تمثل حالة متوالدة Degenerate State وهي هنا ثنائية التوالد.

من الواضح أن الحالات المتوالدة مرتبطة مع المتجهات المتزامنة والإجراءات المتبادلة. ذلك لأن وجود متجه مخصوص متزامن لإجرائين A وB كما أسلفنا يمكن أن يعبر عنه بالرمز $|u_{ab}>$. مثل هذه الحالة تحصل في البئر الجهدي حيث يكون المتجه المخصوص فيها متعلقا بإجرائين: الهاملتوني والتماثلية Parity فهذين الإجرائين متزامنين وكذلك في حالة

جسيم في صندوق يكون الإجرائين المتزامنين هما الهاملتوني والزخم الخطي، وذلك لأن $[H,p]=0,$.

في الحالات المتوالدة تكون إحتمالية أيجاد القيمة المخصوصة للحالة المتوالدة m من المرات كما يلي

$$P_n(a_n)=\frac{\sum_{j=1}^{m}|<\psi_n^j|\psi>|^2}{<\psi|\psi>} \tag{6.15b}$$

لاحظ أن قيمة الإحتمالية للنظام الذي يشتمل على حالات متوالدة تكون بجمع تأثير جميع تلك الحالات، وهذا شئ منطقي إذ أن كل حالة من الحالات المتوالدة تساهم في الإحتمالية الكلية مساهمة تتناسب مع قدرها. ومنطقيا تساهم الحالات الأكثر إحتمالية بقدر أكبر فتهيمن على حالة النظام بصورة أكبر. المثال التالي يوضح كيفية حساب الإحتمالية لنظام متوالد

مثال: خذ المصفوفة التالية للهاملتوني H والحالة الإبتدائية $|\psi_0>$

$$H=\varepsilon\begin{pmatrix}0 & i & 0\\ -i & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}, \qquad |\psi>=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1-i\\ 1-i\\ 1\end{pmatrix}$$

ما هي القيم التي تحصل عليها من قياس الطاقة وما إحتمالياتها؟

إحسب القيمة المتوقعة للهاملتوني

الحل: إن من الضروري أولا معرفة القيم المخصوصة والمتجهات المخصوصة للهاملتوني وهذه يمكن إيجادها بعد تقطير هذا الهاملتوني، أو بحل معادلة القيمة المخصوصة (الحساب في

مثال سابق) ومنها نحصل على القيم 1، -1، -1. كما يمكن إيجاد المتجهات المخصوصة لهذه القيم وهي

$$|\phi_1>=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-i\\0\end{pmatrix},\ |\phi_2>=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-i\\1\\0\end{pmatrix},\ |\phi_3>=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

وبالتالي يكون الهاملتوني المقطّر بالصورة التالية:

$$H=\varepsilon\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},$$

أي أنه لدينا قيمتان للطاقة هي: $E_1=\varepsilon,\ E_2=E_3=-\varepsilon$. وهذا يعني أن الحالة E_2 ثنائية التوالد. ومن خلال معرفتنا أن القيم المخصوصة متكررة فإننا نقول أن هذا الهاملتوني متوالد وهو في الحقيقة ثنائي التوالد. والآن يمكننا نشر المتجه المعطى في المسألة على الأسس المذكورة (المتجهات المخصوصة للهاملتوني) وكما يلي

$$|\psi_0>=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1-i\\1-i\\1\end{pmatrix}=\sqrt{\frac{2}{5}}|\phi_1>+\sqrt{\frac{2}{5}}|\phi_2>+\sqrt{\frac{1}{5}}|\phi_3>$$

وباستخدام حقيقة أن الأسس متعامدة فإن إحتمالية أيجاد $E_1=\varepsilon$ هي

$$P_1(E_1)=|<\phi_1|\psi_0>|^2=|\sqrt{\frac{2}{5}}<\phi_1|\phi_1>|^2=\frac{2}{5}$$

وبما أن القيم المخصوصة الأخرى هي ثنائية التوالد فإننا يجب أن نستعمل المعادلة (6.15b) لحساب الإحتمالية وهكذا نجد

$$P_2(E_2)=|<\phi_2|\psi_0>|^2+|<\phi_3|\psi_0>|^2=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$$

إن القيمة المتوقعة لقياس الطاقة هي

$$< H >= P_1E_1 + P_2E_2 = \frac{2}{5}\varepsilon - \frac{3}{5}\varepsilon = -\frac{1}{5}\varepsilon$$

وللتحقق من هذه النتيجة نحسب القيمة المتوقعة للطاقة من الهاملتوني الفاعل على متجه الحالة الابتدائية $|\psi_0>$ وكما يلي

$$< H >=< \psi_0 | H | \psi_0 >= \frac{\varepsilon}{5}\begin{pmatrix}1+i & 1+i & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & i & 0\\ -i & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-i\\ 1-i\\ 1\end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{5}\varepsilon$$

وهذا متفق تماما مع النتيجة السابقة.

صورة شرودنجر وصورة هايزنبرغ

عُرف لميكانيك الكموم صورتان: صورة شرودنجر Schrodinger Picture التي تتعامل مع دالة الموجة وتضع كل التطورات الزمانية والمكانية فيها $\psi(x,t)$ ففيها إعتمادية الزمن على حين تكون الإجراءات غير معتمدة على الزمن. والصورة الثانية هي ما يسمى صورة هيزنبرغ Heisenberg Picture والتي تتعامل مع متجهات الحالة State Vectors والتي هي مصفوفات عمودية غير معتمدة على الزمن، فيما تُختزن الإعتمادية على الزمن في الإجراءات. وفي الوقت الذي جاءت فيه معادلة شرودنجر لتبين التطور الزمني للنظام بدلالة تطور دالة الموجة أصبح من الضروري وضع معادلة تكشف عن التطور الزمني للإجراءات لتكون المعادلة المقابلة لمعادلة شرودنجر.

يعتبر الفيزيائيون كلا الصورتين متكافئتين ويؤكدون ذلك من خلال ما تتمخض عنه الحسابات في كلا الصورتين. لكن المضمون الفلسفي لكلا الصورتين ربما يكون مختلفاً فعلى حين تتضمن صورة شرودنجر استمرارية المتغيرات الفيزيائية وتتولد عنها حالة ذرية القيم

نتيجة لتداخل الأمواج وكأنها شئ طارئ Emergent فيما تكون الذرية جزءً أساسيا في صورة هيزنبرغ يدخل في البنية الأساسية لصياغة الدوال والمتغيرات الفيزيائية.

معادلة هايزنبرغ في الحركة والحد الكلاسيكي

وفقا لطريقة هايزنبرغ في تمثيل ميكانيك الكموم فإنه يعتبر أن الإعتمادية على الزمن والتي يتمظهر بها النظام الفيزيائي إنما تكمن في أن الإجراءات هي المعتمدة على الزمن على حين تكون المتجهات الممثلة للحالات غير معتمدة على الزمن. ولما كانت الإجراءات تمثل عمليات القياس للملحوظات التي تقابلها، فإن هذا يعني أن عملية قياس أي ملحوظ فيزيائي ستكون معتمدة على الزمن. خلافا لطريقة شرودنجر التي تعتبر الإجراءات ثابتة على حين تضع الإعتمادية الزمانية في دالة الموجة (أو متجه الحالة بتعبير فضاء هلبرت). دعنا ننظر في المعادلة التالية

$$\begin{aligned}\left[H,\hat{A}\right]|\psi> &= \left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t},\hat{A}\right]|\psi> \\ &= i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial t}(\hat{A}|\psi>) - \hat{A}\frac{\partial}{\partial t}|\psi>\right) \\ &= i\hbar\left(\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}\right)|\psi>\end{aligned}$$

لذا فإن

$$\left(\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}\right) = \frac{1}{i\hbar}\left[H,\hat{A}\right] \qquad (6.16)$$

وهذه هي معادلة هايزنبرغ في الحركة.

وإذا كان الإجراء $\hat{A}$ غير معتمد على الزمن فإن

$$\left[\hat{H},\hat{A}\right]=0 \qquad (6.17)$$

وعنئذ نقول أن $\hat{A}$ هو من ثوابت الحركة Constant of Motion. وهكذا فإن أي إجراء متبادل مع الهاملتوني فإنه يمثل كمية فيزيائية منحفظة.

يمكننا الآن النظر في اعتماد القيمة المتوقعة للملحوظ المقابل للإجراء A على الزمن. حيث

$$<\hat{A}>_t=<\psi|\hat{A}|\psi>$$

وهكذا يكون

$$\frac{d}{dt}<\hat{A}>_t=\frac{i}{\hbar}\langle\hat{H}\psi|\hat{A}|\psi\rangle+\langle\frac{d\hat{A}}{dt}\rangle-\frac{i}{\hbar}\langle\psi|\hat{A}\hat{H}|\psi\rangle$$
$$=\langle\frac{d\hat{A}}{dt}\rangle+\frac{i}{\hbar}\langle\psi|[\hat{H},\hat{A}]|\psi\rangle$$

وإذا كان $\hat{A}$ نفسه غير معتمد على الزمن فإن

$$\frac{d}{dt}<\hat{A}>_t=\frac{i}{\hbar}\langle\psi|[\hat{H},\hat{A}]|\psi\rangle$$

فإذا كان A متبادلا مع الهاملتوني H فإن

$$\frac{d}{dt}<\hat{A}>_t=0 \qquad (6.18)$$

أي أن القيمة المتوقعة عندئذ لا تعتمد على الزمن.

مثال: يمكن استعمال معادلة هايزنبرغ في الحركة بهدف الكشف عن علاقة الكميات الفيزيائية في ميكانيك الكموم مع نظيراتها في الفيزياء الكلاسيكية ومن ذلك مثلاً أن نأخذ $\hat{A}=x$ ثم نثبت أن

$$\frac{d}{dt}<\hat{x}>=<\frac{\hat{p}}{m}> \qquad (6.19)$$

وهذا يتم كما يلي: أولاً نعوض في معادلة الحركة لهيزنبرغ (6.16) لنجد أن

$$\frac{d}{dt} < \hat{x} >= \frac{i}{\hbar} < \left[\hat{H}, \hat{x}\right] >= \frac{i}{\hbar} < \left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}), \hat{x}\right] >$$
$$= \frac{i}{\hbar} < \left[\frac{\hat{p}^2}{2m}, \hat{x}\right] >$$

وذلك لأن $[V(\hat{x}), \hat{x}] = 0$ ولذا يكون

$$\frac{d}{dt} < \hat{x} >= \frac{i}{\hbar} < \left[\frac{\hat{p}^2}{2m}, \hat{x}\right] >= \frac{i}{2m\hbar} < (\hat{p}\hat{p}\hat{x} - \hat{x}\hat{p}\hat{p}) >$$
$$= \frac{i}{2m\hbar} < (\hat{p}\hat{x}\hat{p} - i\hbar\hat{p} - \hat{p}\hat{x}\hat{p} - i\hbar\hat{p}) >= \frac{< p >}{m}$$

وذلك أننا أستعملنا العلاقة $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$. من هذه العلاقة يتبين أن القيمة المتوقعة للمعدل الزمني لتغير المسافة هي القيمة المتوقعة للسرعة.

ولو أننا أخذنا $A = p$ فإن بالإمكان أن نثبت بسهولة أن

$$\frac{d}{dt} < p >= - < \frac{dV(x)}{dx} > \qquad (6.20)$$

ومن هاتين المعادلين نثبت أن

$$m\frac{d^2 < x >}{dt^2} = - < \frac{dV(x)}{dx} >$$

وهذه المعادلة مماثلة للمعادلة الكلاسيكية للحركة. لكن ينبغي ملاحظة أننا لا نستطيع أن نقول أن $< x >= x_{cl}$ ذلك لأن العلاقة

$$\langle \frac{dV}{dx} \rangle \neq \frac{dV(< x >)}{d < x >} \qquad (6.21)$$

لا تصح إلا في حالة أن تكون متغيرة ببطء شديد.

التطور الزمني لحالة النظام الفيزيائي

قلنا أن صورة هيزنبرغ لميكانيك الكموم تقرر أن تكون متجهات الحالة الابتدائية غير معتمدة على الزمن على حين تكون الإجراءات معتمدة على الزمن. وهنا يظهر السؤال

المهم: كيف للنظام الفيزيائي أن يتطور مع الزمن إذن؟ والجواب أن معادلة شرودنجر تبقى نافذة لكنها تتخذ الآن صيغة أخرى من الناحية الشكلية إذ يمكننا أن نكتب

$$H\,|\psi(t)>=i\hbar\frac{d\,|\psi(t)>}{dt} \tag{9.22}$$

وحل هذه المعادلة يمكن كتابته كما يلي

$$|\psi(t)>=e^{-iHt/\hbar}\,|\psi(0)> \tag{9.23}$$

وهكذا نجد أن متجه الحالة عند أي زمن لاحق t هو حصيلة إشتغال الإجراء $e^{-iHt/\hbar}$ على ذلك المتجه. وفي حالة أكثر عمومية إذ لا يكون الزمن الابتدائي صفرا بل لنقول t_0 فإن التطور الزمني يصير

$$\begin{aligned}|\psi(t)>&=e^{-iH(t-t_0)/\hbar}\,|\psi(t_0)>\\&=U(t,t_0)\,|\psi(t_0)>\end{aligned} \tag{9.24}$$

حيث أن $U(t,t_0)$ تمثل مصفوفة التحويلات الوحدوية التي تحوي التطور الزمني للحالة من t_0 إلى t.

مثال: لديك الهاملتوني ومتجه الحالة كما في التالي

$$H=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&5\\0&5&0\end{pmatrix},\qquad |\psi>=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix},$$

(أ) جد الحالة $|\psi(t)>$

(ب) قيمة الطاقة عند أي زمن لاحق t.

الحل:

أولا نحتاج حساب المقيم المخصوصة والمتجهات المخصوصة للهاملتوني وهذه هي $E_1=-5,\ E_2=3,\ E_3=5$ والمتجهات المخصوصة المقابلة لها هي

$$|\phi_1> = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix},\ |\phi_2> = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, |\phi_3> = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

باستخدام مفكوك $|\psi(0)>$ بدلالة المتجهات المخصوصة للهاملتوني نجد

$$|\psi(0)> = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix} = \frac{2\sqrt{2}}{5}|\phi_1> + \frac{3}{5}|\phi_2> + \frac{2\sqrt{2}}{5}|\phi_3>$$

وباستخدام المعادلة (9.23) يكون لدينا

$$|\psi(t)> = \frac{2\sqrt{2}}{5}e^{-iE_1t}|\phi_1> + \frac{3}{5}e^{-iE_2t}|\phi_2> + \frac{2\sqrt{2}}{5}e^{-iE_3t}|\phi_3>$$
$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3e^{-3it}\\-4i\sin 5t\\4\cos 5t\end{pmatrix}$$

لحساب $E(0)$ لدينا

$$E(0) = <\psi(0)|H|\psi(0)>$$
$$= \frac{1}{25}\begin{pmatrix}3 & 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\0 & 0 & 5\\0 & 5 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix} = \frac{27}{25}$$

$$E(t) = <\psi(t)|H|\psi(t)>$$
$$= \frac{8}{25}e^{iE_1t}e^{-iE_1t}<\phi_1|H|\phi_1> + \frac{9}{25}e^{iE_2t}e^{-iE_2t}<\phi_2|H|\phi_2> + \frac{8}{25}e^{iE_3t}e^{-iE_3t}<\phi_3|H|\phi_3>$$
$$= \frac{8}{25}(-5) + \frac{9}{25}(3) + \frac{8}{25}(5) = \frac{27}{25} = E(0)$$

وهذا متوقع نظراً لأن الهاملتوني غير معتمد على الزمن أصلاً.

المتذبذب التوافقي البسيط The Simple Harmonic Oscillator

هذه واحدة من أهم مسائل الفيزياء الكلاسيكية والكمومية على السواء. ذلك أن المتذبذب التوافقي يكاد يكون أساس بنية الكون كله فهو يدخل في كل شئ. فأي حركة دورية يمكن القول أنها حركة توافقية بسيطة أو على الأقل يمكن تحليلها إلى حركات توافقية بسيطة.

فالكواكب السيارة تتحرك حركة دورية حول الشمس والشمس تتذبذب فتنتفخ قليلا وتنكمش قليلا بين الحين والآخر. وهذه كلها هي متذبذبات كلاسيكية. لكن الجزئيات الثنائية الذرات والفوتونات المتذبذبة في حيز محدد بمرآتين (كما هو الحال في مرنان الليزر) هي ليست إلا متذبذبات توافقية كمومية أيضاً. لا بل أن الفوتونات نفسها هي ليست إلا متذبذبات توافقية كمومية. لذلك فإن لمسالة المتذبذب التوافقي أهمية كبرى في الفيزياء سواء كان الجانب الكلاسيكي منها أو الجانب الكمومي. على أن الوجه الكمومي للمسألة ربما كان أكثر أهمية لكثرة التطبيقات العملية التي تعتمد على هذه المسألة. ولغرض معرفة الخصائص الفيزيائية والمتغيرات التي يشتمل عليها المتذبذب التوافقي أصبح من الضروري دراسة هذه المسألة على نحو مستفيض يُمكِّننا من حساب مستويات طاقة المتذبذب ومتجهاته المخصوصة.

في هذا الفصل سوف نقوم بحل مسألة المتذبذب التوافقي الكمومي البسيط منطلقين أساسا من الهاملتوني الكلاسيكي المعروف منتقلين به إلى الصياغة الكمومية التي تتخذ من الصياغة الإجرائية سبيلا إلى تشخيص المسألة وحلها رياضياً. ومن ثم نقوم بعد ذلك بتقديم التفسيرات والمضامين الفيزيائية للمسألة.

الصياغة الرياضية للمسألة

نعرف أن الهاملتوني الكلاسيكي للمتذبذب هو

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \qquad (6.25)$$

حيث أن m هي كتلة الجسم المتذبذب و ω هي مقدار التردد الزاوي.

إن الهاملتوني (6.20) يمكن كتابته بالشكل التالي

$$H = \omega\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2}}x - \frac{ip}{\sqrt{2m\omega}}\right)\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2}}x + \frac{ip}{\sqrt{2m\omega}}\right) \qquad (6.26)$$

والآن إذا أردنا أن نحول هذا الهاملتوني إلى الصياغة الكمومية فإننا ينبغي أن نحول المتغيرات الفيزيائية (الملحوظات) إلى إجراءات مع مراعاة علاقات الإجراءات ببعضها. وهذا يعني أن نكتب

$$\omega\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2}}\hat{x}-\frac{i\hat{p}}{\sqrt{2m\omega}}\right)\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2}}\hat{x}+\frac{i\hat{p}}{\sqrt{2m\omega}}\right)=\frac{\hat{p}^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2-\frac{i\omega}{2}\left(\hat{p}\hat{x}-\hat{x}\hat{p}\right)$$

$$=H-\frac{1}{2}\hbar\omega$$

حيث أننا استعملنا العلاقة التبادلية بين الموضع والزخم وهي

$$\left[\hat{x},\hat{p}\right]=i\hbar \qquad (6.27)$$

ولغرض تبسيط العمليات الرياضية سوف نعتبر أن $m=\omega=\hbar=1,$. وهذا الإعتبار جائز وكأننا نستخدم هنا وحدات خاصة للمتغيرات الفيزيائية، وبذلك نتخلص من كثير من الرموز الزائدة دون أن يخل هذا بشئ من محتوى المسألة. وبذلك يصبح الهاملتوني بالشكل التالي

$$H=\frac{1}{2}(\hat{x}-i\hat{p})(\hat{x}+i\hat{p})+\frac{1}{2}$$

والآن دعنا نُعّرف الإجراء التالي

$$\hat{a}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{x}+i\hat{p}\right) \qquad (6.28)$$

ومنه يكون لدينا قرينه الهرمايتي هو

$$\hat{a}^{\dagger}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{x}-i\hat{p}\right) \qquad (6.29)$$

وباستخدام هذه الإجراءات الجديدة يمكننا أن نكتب الهاملتوني بالصيغة التالية

$$\hat{H}=\left(\hat{a}^{\dagger}\hat{a}+\frac{1}{2}\right) \qquad (6.30)$$

لاحظ أن الإجراءات $\hat{a}$ و $\hat{a}^{\dagger}$ هي ليست هرمايتية. لكن ماهي هذه الإجراءات الجديدة وما علاقاتها التبادلية ببعضها وبغيرها من الإجراءات؟

دعنا نرى أولاً أن

$$[a,a^{\dagger}]=1, \tag{6.31}$$

وأن

$$[\hat{H},\hat{a}]=-\hat{a} \tag{6.32}$$

وهكذا نجد أيضا أن

$$[H,a^{\dagger}]=a^{\dagger} \tag{6.33}$$

إن هذه العلاقات التبادلية قابلة للتحقيق المباشر ولا نحتاج لإثباتها إلا للعلاقة التبادلية بين الموقع والزخم أي العلاقة (6.22) وهذه العلاقات مفيدة جدا في تبسيط المسألة والوصول إلى حلولها الجبرية بأسهل الطرق وأيسرها.

كما يمكننا تعريف إجراء العدد $\hat{N}$ الذي يُعرّف عدد الجسيمات في الحالة المعينة وكما يلي

$$N=a^{\dagger}a \tag{6.34}$$

القيم المخصوصة للطاقة Energy Eigenvalues

دعنا الآن نرى إن كان بإمكاننا إيجاد القيم المخصوصة الممكنة للطاقة. بما أن طاقة الوضع للمتذبذب التوافقي لا تعتمد على الزمن فإن بامكاننا استخدام معادلة شرودنجر غير المعتمدة على الزمن لغرض حساب القيم المخصوصة للطاقة وذلك باستخدام معادلة شرودنجر التالية

$$H\,|\,\psi_E >= E\,|\,\psi_E > \tag{6.35}$$

لكننا باستخدام العلاقة (6.30) نستطيع أن نجد أن

$$\begin{aligned} Ha\,|\,\psi_E &>= aH\,|\,\psi_E > -a\,|\,\psi_E > \\ &= (E-1)a\,|\,\psi_E > \end{aligned} \tag{6.36}$$

وهذا يعني أن $a|\psi_E>$ هو متجه مخصوص للهاملتوني H بقيمة مخصوصة قدرها $(E-1)$. ولو أننا كررنا تشغيل الإجراء a فإننا نجد أن $\hat{a}^2|\psi_E>$ يكون متجه مخصوص للهاملتوني H بقيمة مخصوصة قدرها $(E-2)$ وهكذا دواليك. ولذا فإن a يسمى **إجراء الإفناء** Annihilation Operator.

لكن هذه العملية لا يمكن أن تستمر إلى المالانهاية فلابد من وجود حد تقف عنده وذلك هو الحد الأدنى للطاقة E_0. وعند بلوغ هذا الحد تكون القيمة الخاصة للإجراء المركب $Ha|\psi_E>$ هي صفر أي أن

$$Ha|\psi_{E_0}>=0 \tag{6.37}$$

بمعنى أن

$$a|\psi_{E_0}>=0 \tag{6.38}$$

والآن وباستخدام (6.25) نحصل على

$$H|\psi_{E_0}>=E_0|\psi_{E_0}>=\frac{1}{2}|\psi_{E_0}> \tag{6.39}$$

أي أن الحد الأدنى لطاقة المتذبذب التوافي الكمومي هي $\frac{1}{2}$ وإذا ما استعملنا الوحدات الكاملة تكون هذه $\frac{1}{2}\hbar\omega$ مما يختلف مع ما نتوقعه من الصورة الكلاسيكية للمسألة.

كذلك يمكننا عبر استخدام الإجراء الآخر $a^\dagger$ الذي يسمى **إجراء التخليق** Creation Operator العمل على الصعود في مستويات الطاقة إلى أعلى من خلال $\hat{a}^\dagger|\psi_E>$ فهذا هو متجه مخصوص للهاملتوني بقيمة مخصوصة قدرها $(E+1)$ وكما يلي

$$\begin{aligned} H\hat{a}^\dagger|\psi_E> &= \hat{a}^\dagger H|\psi_E>+\hat{a}^\dagger|\psi_E> \\ &= (E+1)\hat{a}^\dagger|\psi_E> \end{aligned} \tag{6.40}$$

وهكذا يمكننا إيجاد المستويات الأعلى التي لا تتوقف عند حد معين على عكس المستويات الدنيا. ومن هذا نستنتج أن طيف الطاقة للمتذبذب التوافي البسيط هو

$$E_n = n + \frac{1}{2} \tag{6.41}$$

وبدلالة الوحدات الكاملة تكون مستويات الطاقة هي

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega \tag{6.42}$$

حيث أن $n = 0,1,2,3......$.

الدوال المخصوصة Eigenfunctions

إن إشتغال الإجراء Ha على المتجه $|\psi_E>$ أظهر أن القيمة المخصوصة هي E-1 مما يعني أن وجود الإجراء a يؤدي إلى تخفيض مستوى الطاقة إلى الأدنى منه، ولذلك يمكننا القول بأن متجه الحالة الناتج عن اشتغال الإجراء a ينبغي أن يتناسب مع هذه الحالة أي أن

$$\hat{a} \,|\psi_n >= \alpha \,|\psi_{n-1} > \tag{6.43}$$

كما لاحظنا أن إشتغال الإجراء $Ha^\dagger$ على المتجه أظهر أن القيمة المخصوصة هي E+1 مما يعني أن وجود الإجراء $a^\dagger$ يؤدي إلى رفع مستوى الطاقة إلى الأعلى منه، ولذلك يمكننا القول بأن متجه الحالة الناتج عن اشتغال الإجراء a ينبغي أن يتناسب مع هذه الحالة أي أن

$$\hat{a}^\dagger \,|\psi_n >= \beta_n \,|\psi_{n+1} > \tag{6.44}$$

والآن

$$<\psi_m \,|\, \hat{a} \,|\, \psi_n >= \alpha_n <\psi_m \,|\, \psi_{n-1} >= \alpha_n \delta_{mn-1}$$

كذلك فإن

$$<\psi_m \,|\, \hat{a}^\dagger \,|\, \psi_n >= \beta_n <\psi_m \,|\, \psi_{n+1} >= \beta_n \delta_{mn+1}$$

يعني هذا أن

$$\alpha_{n+1} = \beta_n^* \tag{6.45}$$

كما أننا نعلم أن

$$<\psi_m|\hat{a}\hat{a}^\dagger|\psi_n>=(n+1)|\delta_{mn} \quad (6.46)$$

ولكن هذا يمكن تقسيمه كما يلي

$$<\psi_m|aa^\dagger|\psi_n>=\sum_p<\psi_m|a|\psi_p><\psi_p|a^\dagger|\psi_n>=(n+1)\delta_{mn}$$
$$=\sum_p\alpha_p\delta_{mp-1}\beta_n\delta_{pn+1}=\alpha_{n+1}\beta_n\delta_{mn}$$

لذا فإن

$$\alpha_{n+1}\beta_n=n+1$$

وبموجب المعادلة (6.37) يكون

$$|\alpha_{n+1}|^2=|\beta_n|^2=n+1$$

وهذا يعني أن

$$\alpha_n=\sqrt{n}, \quad \beta_n=\sqrt{n+1} \quad (6.47)$$

بمعنى أن

$$a|\psi_n>=\sqrt{n}|\psi_{n-1}> \quad (6.48)$$

وأن

$$a^\dagger|\psi_n>=\sqrt{n+1}|\psi_{n+1}> \quad (6.49)$$

وبهذا ومن خلال تعريف x و p بدلالة إجراءات الفناء والتخليق يمكننا تكوين علاقات التكرار التالية

$$\sqrt{n}|\psi_{n-1}>-\sqrt{2}x|\psi_n>+\sqrt{n+1}|\psi_{n+1}>=0 \quad (6.50a)$$
$$\sqrt{n}|\psi_{n-1}>-i\sqrt{2}p|\psi_n>-\sqrt{n+1}|\psi_{n+1}>=0 \quad (6.50b)$$

والآن دعنا نجد الدالة المخصوصة للمستوى الأدنى. نحن نعلم أن

$$\left(x+\frac{d}{dx}\right)|\psi_0>=0 \tag{6.51}$$

وحل هذه المعادلة التفاضلية بسيط وهو

$$|\psi_0>=Ce^{-x^2/2} \tag{6.52}$$

حيث أن C هو ثابت التقويم ويمكن إيجاده بسهولة خلال شرط التقويم

$$|C|^2\int e^{-x^2}dx=|C|^2\sqrt{\pi}=1 \tag{6.53}$$

وبذلك يكون

$$C=\left(\frac{1}{\pi}\right)^{1/4} \tag{6.54}$$

أي أن المتجه المخصوص للحالة الدنيا للمتذبذب التوافقي البسيط هو

$$|\psi_0>=\left(\frac{1}{\pi}\right)^{1/4}e^{-x^2/2} \tag{6.55a}$$

وإذا ما أردنا أن نكتب هذا المتجه بدلالة الوحدات الأصلية فيكون لدينا

$$|\psi_0>=\left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4}e^{-m\omega x^2/2\hbar} \tag{6.55b}$$

ويمكننا بمعرفة هذا المتجه حساب متجهات المستويات الأعلى من العلاقة

$$|\psi_n>=\frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n|\psi_0> \tag{6.56}$$

مثلا يمكننا تحصيل $|\psi_1>$ من $|\psi_0>$ كما يلي

$$a^\dagger|\psi_0>=|\psi_1>$$

ولما كانت

$$\hat{a}^\dagger=\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x}-i\hat{p})=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{x}-\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

فإن

$$|\psi_1>=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{x}-\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{1}{\pi}\right)^{1/4}e^{-x^2/2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\pi}\right)^{1/4}2xe^{-x^2/2}=\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{\pi}}}H_1(x)e^{-x^2/2}$$

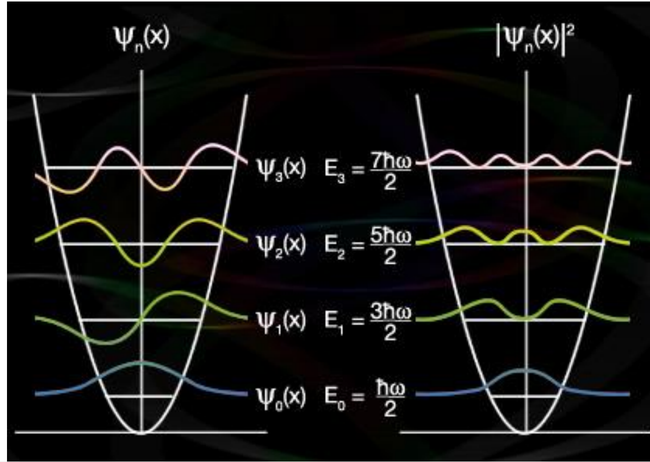
وهكذا يمكننا إيجاد متجه الحالة لأي مستوي آخر من مستويات المتذبذب التوافقي بتشغيل إجراء التخليق. وعموما يمكن كتابة الحل العام بالشكل التالي

$$|\psi_n>=\frac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}H_n(x)\,e^{-x^2/2} \tag{6.57}$$

حيث أن المعاملات H_n هي متعدد حدود هرمايت المعطاة بعض منها في المعادلة . ومن المعادلة (6.55) يمكننا حساب أي متجه حالة نريده بمعرفتنا للمتجه الإدنى.

من خلال القيم المخصوصة لإجراءات الإفناء والتخليق يمكننا معرفة القيمة المخصوصة لإجراء العدد حيث نجد أن

$$N|\psi_n>=a^\dagger a|\psi_n>=n|\psi_n>$$



الشكل (6-1) دوال الموجة وإحتمالية الحالات لمسألة المتذبذب التوافقي البسيط

التمثيل المصفوفي للإجراءات Matrix Representation of Operators

يمكننا الحصول على التمثيل المصفوفي لإجراءات الإفناء والتخليق من المعادلتين (6.48) و (6.49) وكما يلي

$$<\psi_m | a | \psi_n >= \sqrt{n}\delta_{mn-1} \qquad (6.58)$$

كذلك فإن

$$<\psi_m | a^\dagger | \psi_n >= \sqrt{n+1}\delta_{mn+1} \qquad (6.59)$$

بالتالي تكون الصيغة المصفوفية كما يلي

$$a = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & . & . \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{4} & \\ . & . & . & . & . & \sqrt{5} \\ . & . & . & . & . & . \end{pmatrix} \qquad (6.60)$$

كذلك يمكننا إيجاد المصفوفة التي تمثل إجراء التخليق

$$a^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & . & . \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & . & . \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & . \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 & . \\ . & . & . & \sqrt{4} & 0 & 0 \\ . & . & . & . & & \end{pmatrix} \qquad (6.61)$$

كما يمكننا تحصيل الصياغة المصفوفية لإجراء الموقع باستخدام العلاقة

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(a + a^\dagger) \qquad (6.62)$$

حيث أن

$$<\psi_m | x | \psi_n >= \frac{1}{\sqrt{2}} <\psi_{m[\,]} | (a + a^\dagger) | \psi_n >= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{n}\delta_{mn-1} + \sqrt{n+1}\delta_{mn+1}\right]$$

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & . & . \\ \sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & 0 & . & . \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & 0 & \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \sqrt{4} & \\ . & . & . & \sqrt{4} & 0 & \sqrt{5} \\ . & . & . & . & . & . \end{pmatrix} \tag{6.63}$$

أما التمثيل المصفوفي لإجراء الزخم الخطي فيمكن تحصيله من العلاقة

$$p=\frac{-i}{\sqrt{2}}(a-a^{\dagger}) \tag{6.64}$$

وهذه تؤدي الى

$$p=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i\sqrt{1} & 0 & 0 & . & . \\ i\sqrt{1} & 0 & -i\sqrt{2} & 0 & . & . \\ 0 & i\sqrt{2} & 0 & -i\sqrt{3} & 0 & \\ 0 & 0 & i\sqrt{3} & 0 & -i\sqrt{4} & \\ . & . & . & i\sqrt{4} & 0 & -i\sqrt{5} \\ . & . & . & . & & \end{pmatrix} \tag{6.65}$$

أما التمثيل المصفوفي للهاملتوني فإن يتخذ الشكل التالي

$$H=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & . & . \\ 0 & 3/2 & 0 & 0 & . & . \\ 0 & 0 & 5/2 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 7/2 & 0 & \\ . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & & \end{pmatrix} \tag{6.66}$$

تطبيق معادلة هايزنبرغ للحركة

يمكننا تطبيق معادلة هايزنبرغ في الحركة على مسألة المتذبذب التوافقي لإيجاد إعتمادية الإجراءات الداخلة فيها على الزمن. لدينا

$$H = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)$$
$$= \hbar\omega\left(a^\dagger(t)a(t) + \frac{1}{2}\right) \qquad (6.67)$$

وكنا قد أثبتنا أن

$$[a(t), a^\dagger(t)] = 1,$$

وطبقا لمعادلة هايزنبرغ في الحركة فإن

$$\frac{d\ a(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar}\left[H, a(t)\right] \qquad (6.68)$$

ولما كان

$$\left[H, a(t)\right] = \hbar\omega\left(a^\dagger aa - aa^\dagger a\right)$$
$$= \hbar\omega\left[a^\dagger, a\right]a \qquad (6.69)$$
$$= -\hbar\omega a$$

فإن

$$\frac{d\ a(t)}{dt} = -i\omega\, a(t) \qquad (6.70a)$$

وبالمثل نجد أن

$$\frac{d\ a^\dagger(t)}{dt} = i\omega\, a^\dagger(t) \qquad (6.70b)$$

وحل هاتين المعادلتين هو

$$a(t) = a(0)e^{-i\omega t} \qquad (6.71)$$

كذلك

$$a^\dagger(t) = a^\dagger(0)e^{i\omega t} \qquad (6.72)$$

ولما كان

$$p = \frac{-i}{\sqrt{2}}(a - a^\dagger) \quad (6.73)$$

فإن

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{-i}{\sqrt{2}}(a(0)e^{-i\omega t} - a^\dagger(0)e^{i\omega t}) \\ &= \frac{-i}{\sqrt{2}}\left[(a(0) - a^\dagger(0))\cos\omega t - i\,(a(0) - a^\dagger(0))\sin\omega t\right] \quad (6.74) \\ &= p(0)\cos\omega t - x(0)\sin\omega t \end{aligned}$$

وبالمثل يكون لدينا

$$x(t) = x(0)\cos\omega t + p(0)\sin\omega t \quad (6.75)$$

وبهذا نكون قد كشفنا عن الإعتمادية الزمنية للإجرائين الأساسيين في مسألة المتذبذب التوافقي.

تعليقا على النتائج أعلاه أرى أن المتغيرات الفيزيائية الرئيسية في المسألة وهي الموضع x والزخم p تتعرض كما هو واضح إلى تجدد مستمر يحكم من خلال قيمة تردد المتذبذب التوافقي. وفي الوقت الذي تدفعنا الإجراءات $a^\dagger(t)$ و $a(t)$ إلى القول بأنها هي وسيلة التخليق والإفناء فإنا نجد من المعادلتين (6.64) و (6.65) أنهما بأنفسهما يخضعان لعملية التجدد خلال الزمن. أي أنهما كلاهما مخلوقان متجددان تباعاً أي أن عمليات التخليق والإفناء هي الأخرى متجددة.

الطاقة الصفرية للمتذبذب التوافقي The Zero-Point Energy

لاحظنا عند حساب مستويات الطاقة للمتذبذب التوافقي البسيط أن هنالك حدا أدنى للطاقة يسمى الطاقة الصفرية للمتذبذب ومقداره $\frac{1}{2}\hbar\omega$. وهذا المقدار هو الحد الأدنى الذي يمكن أن تكون عليه طاقة المتذبذب إلا أنه مقدار صغير كما نرى إنما ليس صفرا.

وبالإمكان إثبات أن هذه الطاقة الصفرية للمذبذب التوافقي ناتجة عن فعاليات ما يسمى تقلبات الفراغ Vacuum Fluctuations. وفي هذا التصور يفترض أن الفراغ مؤلف من عدد لا نهائي من متذبذبات مجازية Virtual موزعة على نطاق واسع من الترددات والتي تظهر وتختفي خلال زمن ضئيل جدا يساوي ثابت بلانك مقسوما على الطاقة الكلية للتمذبذب. وبالتالي فإن طاقة الفراغ هي حصيلة ما يجتمع من هذه المتذبذبات المجازية. إن هذه المسألة لم تزل غير مفهومة ويتم معالجتها من خلال نظرية المجالات الكمومية ومن الملاحظ أن هنالك مشكلة جوهرية مزمنة في هذا التصور ذلك أن القول أن الفراغ يتألف من عدد لانهائي من المتذبذبات التوافقية سيجعل الطاقة الكلية التي يحتويها الفراغ مقدارا لا نهائياً وهذا غير معقول. لذلك يلجأ الفيزيائيون إلى القول أن طاقة المتذبذبات الفراغية تلغي Cancel بعضها بعضاّ، وهذا معقول، ليبقى بعد ذلك من مجموع الطاقة الكلية لاشئ فتكون طاقة الفراغ صفراً بالنتيجة النهائية. وهذا الكلام صحيح إذا ما أهملنا تحدب الزمكان للفضاء الكوني. فالطاقة الكلية للفراغ المسطح تماما هي صفر بالضبط. أما ما نجده فعليا من خلال الأرصاد الكونية من طاقة فراغ أكبر من الصفر قليلا فإن ذلك يعود لوجود تحدب قليل جدا للزمكان في وقتنا الحاضر تتولد عنه طاقة فراغ محدودة وصغيرة جدا تقدر بـ(10^{-9}) جول لكل متر مكعب. وقد كان هذا القدر كبيرا في المراحل المبكرة من خلق الكون حتى أنه كان المكون الأساس لطاقة الكون نفسها. وهذه تسمى طاقة كازمير Casimir Energyالتي تتولد عندما يتم إحاطة الفضاء الفارغ بتحدب موجب. وقد تم التثبت عملياً من وجود طاقة كازمير وتم قياسها في مختبرات بل وغيرها في الولايات المتحدة الأمريكية. كما أن بحوثاً علمية جادة قد أجريت أثبتت أن طاقة الكون كلها يمكن أن تكون قد انتجت من خلال توليد طاقة كازمير.

القياس في ميكانيك الكموم

فيما سلف من البنود في هذا الفصل والفصول السابقة تعرضنا في مواضع عديدة إلى كيفية حساب القيم المخصوصة وايجاد المتجهات المخصوصة كما قمنا بحساب القيم المتوقعة لإجراءات معينة. والآن نقدم مثالاً مهماً يبين لنا تأثير قياس ملحوظ معين على متجه الحالة وكيف أن عملية قياس تالية يمكن أن تتأثر بالقياس الأول. هذا المثال مهم جدا لكونه يكشف عن هذه الصفة الميزة للإجراءات الغير متبادلة.

مثال: لديك متجه الحالة $|\psi>$ والإجرائين A و B وكما يلي

$$|\psi>=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix},\ A=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\ \ B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

ما هي احتمالية أن تعطينا عملية قياس <A> القيمة -1؟

دعنا نفترض القيام بعملتين لقياس B و A تباعاً. ما إحتمالية أن نحصل على القيمة 0 لـB و -1 لـA.

دعنا الآن نفترض قياس A أولاً ثم B ما إحتمالية أن نحصل على القيمة 0 لـB و 1 لـA.

قارن النتيجتين اللتين تحصل عليهما من (ب) و(ت) وفسر ذلك.

الحل:

ينبغي أولاً ملاحظة أن الإجرائين A و B غير متبادلين. وهذا يعني أن ليس لهما متجهات مخصوصة متزامنة (مشتركة). ثانيا: في مثل هذه الحالة فإن قياس قيمة لملحوظ معين سيؤدي إلى تأثر متجه الحالة وتحوله إلى متجه آخر تحدده عملية القياس للملحوظ الأول.

دعنا نجد القيم المخصوصة والمتجهات المخصوصة للإجرائين A. وهذه هي

$a_{-1}=-1,\ a_0=0,\ a_1=1$ والمتجهات المخصوصة المقابلة لهذه القيم هي

$$|a_{-1}>=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\ \sqrt{2}\\ -1\end{pmatrix},\ |a_0>=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix},|a_1>=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix}$$

إن إحتمالية أن تعطينا عملية قياس <A> القيمة -1 هو مسقط الحالة $|\psi(t)>$ على المتجه المخصوص الذي يقابل القيمة $a_{-1}=-1,$ وهذا هو

$$P(a_{-1})=\frac{|<a_{-1}|\psi(t)>|^2}{<\psi(t)|\psi(t)>}$$

لدينا $<\psi(t)|\psi(t)>=6$ بالتالي فإن

$$P(a_{-1})=\frac{1}{6}|\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & \sqrt{2} & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}|^2=\frac{1}{3}$$

إن قياس B سوف تعطينا أي من القيم المخصوصة له وهذه هي

$b_{-1}=-1, b_0=0, b_1=1$ حيث يتضح أنها نفس القيم المخصوصة لـ A لكن المتجهات المخصوصة لـ B هي

$$|b_{-1}>=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix},\ |b_0>=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix},|b_1>=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

لذلك فإن احتمالية تحصيل القيمة 0 هي مربع مسقط المتجه المخصوص المقابل لهذه القيمة المخصوصة على $|\psi(t)>$ أي

$$P(b_0)=\frac{|<b_0|\psi(t)>|^2}{<\psi(t)|\psi(t)>}=\frac{1}{6}|\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}|^2=\frac{2}{3}$$

بعد قياس هذه القيمة تتغير حالة النظام إلى حالة جديدة هي عبارة عن مسقط المتجه $|\psi(t)>$ على المتجه المخصوص $|b_0>$ وهذا هو

$$|\phi(t)>=|b_0><b_0|\psi(t)>=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$$

لذلك فإن احتمالية قياس A أن يكون 1 هو مسقط المتجه المخصوص لـA المقابل لهذه القيمة على متجه الحالة الجديد $|\phi(t)>$ أي

$$P(a_1)=\frac{|<a_1|\phi(t)>|^2}{<\phi(t)|\phi(t)>}=\frac{1}{4}|\begin{pmatrix}1 & \sqrt{2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}|^2=\frac{1}{2}$$

ولذا فإننا إذا ما أردنا إحتمالية إيجاد قيمة B وقيمة A أعلاه على التتابع فإنها حصيلة مضروب الإحتماليتين وهذه هي

$$P(b_0,a_1)=P(b_0)P(a_1)=\frac{2}{3}\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

بنفس الطريقة آنفة الذكر في فرع (ب) من السؤال يمكننا أن نقول أن قياس A أولا ليكون ناتجه 1 سيعني أننا أزاء حالة جديدة للنظام بعد عملية القياس وهي

$$|\chi(t)>=|a_1><a_1|\psi(t)>=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$$

لذا فإن

$$P(b_0)=\frac{|<b_0|\chi(t)>|^2}{<\chi(t)|\chi(t)>}=\frac{1}{4}|\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}|^2=\frac{1}{2}$$

بالتالي فإن

$$P(a_1,b_0)=P^{'}(a_1)P^{'}(b_0)=\frac{1}{3}\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

إن سبب إختلاف هذه النتيجة عن ما حصلنا عليه من الفرع (ب) هو أن الإجرائين غير متبادلين.

أسئلة مفاهيمية للفصل السادس

1. ما المعنى الفيزيائي للإجراء؟
2. ما المعنى الفيزيائي لإجرائين غير متبادلين؟ وما المعنى الفيزيائي لإجرائين متبادلين؟
3. هل أن الإجراءات في ميكانيك الكموم خطية أم لا؟
4. ما أهمية أن تكون نظرية الكموم خطية؟
5. لو لم تكن نظرية الكموم نظرية خطية فهل بالإمكان استعمال مبدأ تراكب الأمواج؟
6. ما أهمية الإجراءات الهرمايتية؟
7. ماذا يعني أن تكون الدوال المخصوصة لإجراء معين بقيم مخصوصة مختلفة متعامدة على بعضها؟ وما أهمية ذلك في تصور عوالم موازية تنتمي لنفس الهاملتوني؟
8. ما أهمية إجراء الإسقاط وما دوره في ميكانيك الكموم؟
9. كيف يمكن أن نستفيد من العلاقات التبادلية للإجراءات وهل تتوقع أن العلاقات التبادلية تساهم في تحديد التمثيل المصفوفي للإجراءات؟
10. ما المضامين الفيزيائية لعدم تبادل إجرائين مع بعضهما؟
11. ما الفرق بين صورة شرودنجر وصورة هيزنبرغ؟
12. ما أهمية مسألة المتذبذب التوافقي وأين تكون أهم تطبيقاتها؟
13. ما إجراءات التخليق والإفناء؟ وهل هي هرمايتية أم لا؟
14. ما الطاقة الصفرية للمتذبذب التوافقي وما مصدرها؟

مسائل الفصل السادس

س1) إذا كان A و B هما إجرائين هرمايتيين فاثبت أن

$$[A,B]^{\dagger}=-[A,B]$$

س2) هل أن الإجراءات التالية هرمايتية؟

$$\left(A+A^{\dagger}\right),\quad i\left(A+A^{\dagger}\right),\quad i\left(A-A^{\dagger}\right)$$

س3) برهن أن القيم المخصوصة لمضاد الإجراء الهرمايتي هي كميات غير حقيقية.

س4) برهن أن $|\psi_n><\psi_n|$ يصح أن يكون إجراء إسقاط فقط عندما تكون $|\psi_n>$ مقومة.

س5) برهن أن محصلة تبادل إجرائين هرمايتيين هي إجراء هرمايتي مضاد.

س6) برهن رياضياً أن

(أ) $Tr(AB)=Tr(BA)$

(ب) وبالتالي بين أن تريس (أثر) قوس التبادل يكون صفر دوماً.

س7) خذ المصفوفات التالية

$$A=\begin{pmatrix}5 & 3+2i & 3i\\ -i & 3i & 8\\ 1-i & 1 & 4\end{pmatrix},\qquad |\psi>=\begin{pmatrix}-1+i\\ 3\\ 2+2i\end{pmatrix},\quad |\phi>=\begin{pmatrix}6 & -i & 5\end{pmatrix}$$

إحسب (أ) $A|\psi>,\ <\phi|A,\ <\phi|A|\psi>,\ |\psi><\phi|$

(ب) أوجد القرين المعقد والترانسبوز والقرين الهرمايتي للإجراء A وللمتجهين $|\psi>$ و $|\phi>$.

س8) (أ) إثبت أن مجموع إجرائي إسقاط لا يؤلف إجراء إسقاط ما لم يكون مضروبهما صفراً.

(ب) إثبت أن مضروب إجرائي إسقاط لا يؤلف إجراء إسقاط ما لم يكونا متبادلين.

س9) إثبت أن إجراء الإسقاط هو إجراء هرمايتي.

س10) ما هو الشرط الذي يجب أن يكون نافذا لكي تكون الإجراءات التالية وحدوية.

(أ) $(1+iA)/(1-iA)$

(ب) $(1+iB)/\sqrt{A^2+B^2}$

س11) لديك إجراءات ممثلة بمصفوفاتها التالية

$$A=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&1&2\\0&2&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&3\\0&3&0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}0&3&0\\3&0&2\\0&2&0\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix}$$

جد نتيجة قياس الملحوظات المقابلة لهذه الإجراءات.

أي من هذه الإجراءات تبادلية؟ جد المتجهات المخصوصة الأساسية المشتركة بين هذه الإجراءات.

س12) لديك متجه إبتدائي $|\psi_0>$ وهاملتوني

$$|\psi_0>=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix},\ H=\begin{pmatrix}3&1&0\\0&0&5\\0&5&0\end{pmatrix},$$

لو أن قياسا للطاقة جرى فما ستكون النتيجة وبأية إحتمالية؟

جد حالة النظام بعد زمن t وذلك بنشر $|\psi_0>$ بدلالة المتجهات المخصوصة للهاملتوني.

إحسب طاقة النظام الابتدائية (عند زمن t=0) وعند اي زمن آخر t. هل تجدها مختلفة؟

هل تؤلف المتجهات المخصوصة للهاملتوني H مجموعة كاملة من الأسس؟

س13) لديك المصفوفتين المربعتين

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 7 & -3i\\ 0 & 3i & 5\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}0 & -i & 3i\\ -i & 0 & i\\ 3i & i & 0\end{pmatrix}$$

هل أن A و B هرمايتية؟ أوجد القيم المخصوصة والمتجهات المخصوصة لهما. لماذا تكون القيم المخصوصة للمصفوفة A بينما تكون التي للمصفوفة B خيالية؟

س14) لديك متجه الحالة $|\psi>$ والإجرائين A و B وكما يلي

$$|\psi>=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 4\end{pmatrix},\ A=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & i\\ 0 & -i & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -i\\ 0 & i & 0\end{pmatrix}$$

إذا أجرينا قياساً لـA أولاً ثم أتبعناه بقياس B فما هي إحتمالية أن نحصل على القيمة **0** لـA وقيمة **1** لـB؟

لو عكسنا تعاقب القياس فما هي الإحتمالية؟

قارن بين النتيجتين أعلاه ثم فسر لك.

س15) إذا كان

$$H=\begin{pmatrix}2 & i & 0\\ -i & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix},$$

(أ) هل أن المتجه $|\phi>=\begin{pmatrix}i\\ 7i\\ -2\end{pmatrix}$ هو من متجهاته المخصوصة؟

(ب) أوجد القيم المخصوصة للطاقة وسمها a_1, a_2, a_3 والمتجهات المخصوصة المقومة. وسمها $|a_1>, |a_2>, |a_3>$.

(ج) أوجد الإجراء $P = |a_1><a_1|$ هل أن P هو إجراء إسقاط؟ إحسب قوس التبادل $[P, H]$ باستخدام جبر المتبادلات أولا ثم باستخدام ضرب المصفوفات.

س16) تحت أية شروط تكون الإجراءات التالية وحدوية؟

$$C = (1 + iA)/(1 - iA)$$

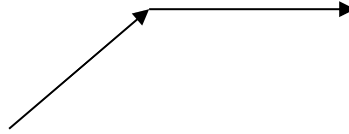
$$D = (1 + 1B)/\sqrt{|A|^2 + |B|^2}$$

س17) اكتب معادلة شرودنجر لجسيم يتحرك في بعد واحد خلال مائع ويعاني من مقاومة تتناسب طرديا مع مربع السرعة ثم جد الحلول الممكنة للمعادلة.

الفصل السابع

الزخم الزاوي

يعتبر الزخم الزاوي من أهم الكميات الفيزيائية المعبرة عن مضمون الحركة منسوبة الى نقطة مرجعية معينة. وإذا كان الزخم الزاوي مرتبطا في أذهاننا دوما بالحركة الدورانية فإنه في الحقيقة ليس كذلك، أي أنه ليس مرتبطا بالحركة الدورانية فقط. ذلك لأن أي جسم يتحرك بالنسبة الى نقطة مرجعية Reference Point يكون له زخم زاوي حول اي نقطة مرجعية (أنظر الشكل).



والزخم الزاوي هو كمية متجهة ويعرف الزخم الزاوي بأنه المضروب المتجهي لموضع الجسم عند أية لحظة مع زخمه الخطي، أي أن

$$\mathrm{L} = \mathrm{r} \times \mathbf{p} \qquad (7.1)$$

وبموجب ما نعرفه عن الضرب المتجهي فإننا يمكن أن نكتب

$$\mathbf{L} \rightarrow L = (L_x, L_y, L_z) = \det\begin{bmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{bmatrix} \qquad (7.2)$$

أي أن مركبات الزخم الزاوي الثلاثة، وهي كميات عددية، ستكون

$$\begin{aligned} L_x &= \left(yp_z - zp_y\right) \\ L_y &= \left(zp_x - xp_z\right) \\ L_z &= \left(xp_y - yp_x\right) \end{aligned} \qquad (7.3)$$

وفي ميكانيك الكموم يتخذ الزخم الزاوي كغيره من الكميات صيغة إجرائية فنحول مركبات الزخم الخطي الى الإجراءات التي تقابلها. فتكون لدينا مركبات الزخم الزاوي الثلاثة بالصيغة الإجرائية كما يلي

$$L_x = \left(yp_z - zp_y\right) = -i\,\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$L_y = \left(zp_x - xp_z\right) = -i\,\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right) \qquad (7.4)$$

$$L_z = \left(xp_y - yp_x\right) = -i\,\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

وبدلالة الإحداثيات القطبية الكروية تكون صيغة هذه المركبات كما يلي

$$L_x = i\hbar\left(\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\phi}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

$$L_y = i\hbar\left(-\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\sin\phi}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right) \qquad (7.5)$$

$$L_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}$$

وتكون صيغة مربع الزخم الزاوي الكلي هي

$$L^2 = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]. \qquad (7.6)$$

العلاقات التبادلية Commutation Relations

على الرغم من أن مركبات الزخم الزاوي بصيغتها الكلاسيكية هي كميات متبادلة أي أن $L_xL_y = L_yL_x$ فإن مركبات الزخم الزاوي بصيغتها الإجرائية ليست متبادلة حيث نجد أن

$$\left[L_x, L_y\right] = i\hbar L_z \qquad (7.7)$$

وكذلك نجد

$$\left[L_y, L_z\right] = i\hbar L_x \qquad (7.8)$$

وأيضا

$$\left[L_z, L_x\right] = i\hbar L_y \qquad (7.9)$$

ولما كانت

$$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 \qquad (7.10)$$

فإنه يمكن أن نثبت أن

$$\left[L^2, L_i\right] = 0 \qquad (7.11)$$

وذلك لجميع مركبات الزخم الزاوي. مثلا

$$\begin{aligned}\left[L_z, L^2\right] &= \left[L_z, L_x^2 + L_y^2 + L_z^2\right] \\ &= \left[L_z, L_x\right]L_x + L_x\left[L_z, L_x\right] + \left[L_z, L_y\right]L_y + L_y\left[L_z, L_y\right] \\ &= i\hbar L_y L_x + i\hbar L_x L_y - i\hbar L_x L_y - i\hbar L_y L_x = 0\end{aligned} \qquad (7.12)$$

إن هذه العلاقات التبادلية مهمة جدا لحساب القيم المخصوصة والدوال المخصوصة للزخم الزاوي. فمثلا نعرف أنه لا توجد دالة مخصوصة مشتركة لجميع مركبات الزخم الزاوي وذلك لأن هذه المركبات كما نرى غير تبادلية. لكننا يمكن أن نجد دوال مخصوصة مشتركة لمربع الزخم الزاوي الكلي وواحدة من المركبات فقط. من جانب آخر فإن عدم تبادل أي إجرائين يوجب وجود مقدار من اللادقة في قياس الملحوظين اللذين يقابلهما وذلك حسب العلاقة (6.12) التي سبقت البرهنة عليها.

المتجهات المخصوصة للزخم الزاوي

الواضح أن إجراءات الزخم الزاوي هي تفاضلات زاوية. وكما قلنا فإنه لا يمكننا أيجاد متجهات مخصوصة مشتركة لجميع المركبات بل هي ممكنة فقط لمربع الزخم الزاوي الكلي ولواحدة من المركبات ونظراً لأن المركبة L_z هي الأبسط فإننا نختارها مع مربع الزخم الزاوي L^2 ونجعل $|lm>$ يرمز إلى المتجهات المخصوصة المشتركة لهما معا حيث نضع

$$L^2 | lm >= l(l+1)\hbar^2 | lm > \quad (7.13)$$

كذلك

$$L_z | lm >= m\hbar | lm > \quad (7.14)$$

يمكن إعادة كتابة المعادلة (7.13) بصيغة صريحة أكثر كما يلي

$$\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]| lm > +l(l+1) | lm >= 0$$

ولما كانت $| lm >$ هي دالة للزاويتين θ و ϕ فإننا يمكن أن نكتب

$$| lm >= P(\theta)\Phi(\phi) \quad (7.15)$$

ثم نجري عملية فصل المتغيرات التقليدية ليصبح لدينا

$$\left[\frac{\Phi(\phi)}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial P(\theta)}{\partial\theta}\right)+\frac{P(\theta)}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi(\phi)}{\partial\phi^2}\right]+l(l+1)P(\theta)\Phi(\phi)=0$$

وبالقسمة على $P(\theta)\Phi(\phi)$ نجد أن هذه المعادلة يمكن فصلها الى معادلتين وكما يلي

$$\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial P(\theta)}{\partial\theta}\right)\right]+l(l+1)\sin^2\theta\, P(\theta)+m^2P(\theta)=0$$

وهذه هي معادلة لجندر الفرنسي الذي وجد أن حلها هو متعدد حدود Polynomial سمي متعدد حدود لجندر المشارك Associated Legendre Polynomial الذي يعتمد على قيم l و m وصيغته كما يلي

$$P_{lm}(x)=\left(1-x^2\right)^{|m|/2}\frac{d^{|m|}}{dx^{|m|}}P_l(x) \quad (7.16)$$

حيث أن

$$P_l(x)=\frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l \quad (7.17)$$

وفيه $x=\cos\theta$

ومن هذا يتضح أن

$$P_{l0}(x) = P_l(x) \qquad (7.18)$$

وهكذا يمكن أن نجد مثلا أن

$$P_1(\cos\theta) = \cos\theta$$
$$P_2(\cos\theta) = \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1) \qquad (7.19)$$
$$P_3(\cos\theta) = \frac{1}{2}(5\cos^3\theta - 3\cos\theta)$$

إن دوال لجندر هذه ترتبط مع بعضها بعلاقة التعامد Orthogonality التالية

$$\int_{-1}^{1} P_{l''}(x)P_l(x)dx = \frac{2}{2l+1}\delta_{l''l} \qquad (7.20)$$

كذلك فإن هذه الدوال ترتبط بعلاقة الكمال Completeness التالية

$$\frac{1}{2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)P_l(x')P(x) = \delta(x' - x) \qquad (7.21)$$

كما أن

$$P_l(-x) = (-1)^l P_l(x) \qquad (7.22)$$

وإن

$$P_{lm}(-x) = (-1)^{l+m} P_{lm}(x) \qquad (7.23)$$

وكذلك نجد أن المعادلة الثانية على ϕ هي

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} + m^2\Phi = 0$$

وحلها بسط جدا فهذه تعني أن

$$\Phi(\phi) = Ce^{im\phi}$$

ولايجاد قيمة ثابت التقويم C نجعل

$$\int_0^{2\pi} \Phi^* \Phi d\phi = |C|^2 \int_0^{2\pi} d\phi = 1$$

ومنه نجد أن

$$C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

وهكذا تكون صيغة الحل المقوم للجزء هي

$$\Phi(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\phi} \qquad (7.24)$$

وبجمع الحلين على بعضهما نرى أن الحل المقوم الكامل لمتجه الزخم الزاوي المخصوص هو التوافقيات الكروية التالية

$$Y_{lm}(\theta,\phi) = (-1)^m \sqrt{\left(\frac{2l+1}{4\pi}\right)\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_{lm}(\cos\theta) e^{im\phi} \qquad (7.25)$$

من الخواص الأخرى لهذه الدوال أن

$$Y_{l,-m} = (-1)^m Y_{l,m}^* \qquad (7.26)$$

وكذلك علاقات التعامد

$$< Y_{l'm'} | Y_{lm} >= \delta_{l'l} \delta_{m'm} \qquad (7.27)$$

وفيما يلي جدول بالصيغ المحسوبة لبعض التوافقيات الكروية

$$
\begin{aligned}
Y_{10} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta \\
Y_{11} &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{i\phi} \\
Y_{22} &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta e^{2i\phi} \\
Y_{21} &= -\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta e^{i\phi} \\
Y_{20} &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3\cos^2\theta-1)
\end{aligned}
\tag{7.28}
$$

ربما كانت هذه الدوال القياسية هي أهم دوال على الإطلاق في الفيزياء فإن لها تطبيقات مهمة جدا فضلا عن أنها تعبر عن تكوينات طبيعية في توزيعات المكان.

مثال: تتألف جزيئة الميثان CN من ذرة كربون وذرة نتروجين تفصلهما مسافة a وتدور الذرتان في مستوي حول محور يمر بمركز الكتلة للجزيئة وعمودي على مستوي الدوران. جد (أ) الهاملتوني الذي يصف هذا النظام. (ب) جد طيف الطاقة. أكتب معادلة لقيمة الفرق في الطاقة ما بين الحالة الدنيا والحالة المثارة الأولى بدلالة كتل الذرات والمسافة بينهما.

الحل: (أ) على افتراض أن الدوران يتم حول المحورين المتعامدين x وy فإن الطاقة الحركية للنظام هي طاقة دورانية، لذلك يكون الهاملتوني هو $H=\frac{L_x^2+L_y^2}{2I}=\frac{\mathbf{L}^2-L_z^2}{2I}$

حيث أن I هو عزم القصور الذاتي للنظام.

(ب) نظرا لعدم وجود دوران حول المحور z فإن القيمة المخصوصة له ستكون صفرا وبالتالي فإن طيف الطاقة سيكون $E=\frac{\hbar^2\ell(\ell+1)}{2I}$

لغرض حساب الطاقة نحتاج إلى معرفة عزم القصور الذاتي وهو هنا $I=M_{red}a^2$

حيث أن

$$M_{red}=\frac{M_C M_N}{M_C+M_N}=\frac{12\times 14}{26}M_{nucleon}=6.46M_{nucleon}$$

وإذا ما أخذنا المسافة بين الذرتين بالأنكستروم فإن

$$I=6.46\times(1.67\times 10^{-27}kg)(10^{-10}m/A)^2 a_A^2=1.08\times 10^{-46}a_A^2$$

مما يعني أن الفرق في الطاقة بين الحالة الدنيا $l=0$ والحالة المثارة الأولى $l=1$ هو

$$\Delta E=\frac{(1.05\times 10^{-34}J.s)^2}{1.08\times 10^{-46}a_A^2 kg.m^2}\times\frac{1}{(1.6\times 10^{-19}J/eV)}=\frac{6.4\times 10^{-4}}{a_A^2}eV$$

التوافقيات الكروية أسساً لفضاء هلبرت

كما بيّنا آنفاً فإن التوافقيات الكروية والتي هي دوال زاوية تصف توزيعات مكانية على سطوح كروية هي الدوال المخصوصة للزخم الزاوي ومركباته. هذه الدوال يمكن أن تؤلف أسساً لفضاء هلبرت حيث أنها تؤلف مجموعة كاملة من الدوال المتعامدة والمقومة. وبموجب ذلك يمكن أستعمالها كأسس لنشر الدوال الزاوية الموصوفة على السطوح الكروية. مثلاً

$$f(\theta,\phi)=\sum_l\sum_m C_{lm}Y_{lm}(\theta,\phi)$$

حيث أن

$$C_{lm}=\int d\Omega Y_{lm}^*(\theta,\phi)f(\theta,\phi)$$

وإذا ما كانت $f(\theta,\phi)$ دالة زاوية مقومة بحيث يكون

$$\int d\Omega\,|f(\theta,\phi)|^2=1$$

فإن المعاملات $|C_{lm}|^2$ تمثل إحتماليات إيجاد قيم متزامنة للإجرائين L^2 و L_z بقيم مخصوصة هي $l(l+1)\hbar^2$ و $m\hbar$ على التوالي. وذلك أن احتمالية إيجاد القيمة $l(l+1)\hbar^2$ في اي عملية قياس هي

$$P(l)=\sum_{m=-l}^{l}|C_{lm}|^2$$

كذلك تكون القيمة المتوقعة لـ L_z هي

$$< L_z > = \sum_l \sum_{m=-l}^{l} m\hbar \, | C_{lm} |^2$$

وعموما يمكننا أن نكتب المتجه بالطريقة التالية

$$| \psi > = \sum_l \sum_{m=-l}^{l} C_{lm} \, | Y_{lm} >$$

ولما كانت

$$< Y_{l'm'} \, | Y_{lm} > = \delta_{l'l} \delta_{m'm}$$

فإن

$$C_{lm} = < Y_{lm} \, | \psi >$$

وهكذا تصبح

$$| \psi > = \sum_l \sum_{m=-l}^{l} | Y_{lm} > < Y_{lm} \, | \psi >$$

وهذا يعني أن

$$\sum_l \sum_{m=-l}^{l} | Y_{lm} > < Y_{lm} | = 1$$

مما يؤكد أنها مجموعة كاملة من الأسس

أن هذا النشر بدلالة التوافقيات الكروية مفيد جدا في تحليلات التوزيع المكاني لأية متغيرات على سطح كروي وقد تم استخدام هذا التقنية في تحليل الإختلافات في توزيعات درجة الحرارة للخلفية الكونية المايكروية التي هي من مخلفات فترة الانفجار العظيم في مراحل خلق الكون الأولى.

إجراءات الرفع والخفض Raising and Lowering Operators

كيف لنا أن ننتقل من متجه مخصوص الى آخر؟ من حالة للزخم الزاوي الى اخرى؟ لهذا الغرض يتم تعريف إجرائين جديدين هما

$$L_{+} = L_x + iL_y \tag{7.29}$$

وكذلك

$$L_{-} = L_x - iL_y \tag{7.30}$$

ومن خلال معرفتنا بالصيغة الصريحة للإجراءات L_x و L_y فليس من الصعب معرفة الصيغة الصحيحة للإجراءات الجديدة وهذه هي

$$L_{\pm} = \hbar e^{\pm i\phi}\left(\pm\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right) \tag{7.31}$$

من الواضح أننا نتمكن من (7.29) و(7.30) أن نجد أن

$$L_x = \frac{1}{2}\left(L_{+} + L_{-}\right) \tag{7.32}$$

كما أن

$$L_y = -\frac{i}{2}\left(L_{+} - L_{-}\right) \tag{7.33}$$

العلاقات التبادلية

من خلال الصيغ السابقة للإجرائين L_x و L_y نتمكن من ايجاد العلاقات التبادلية للإجراءات L_{+} و L_{-} وكما يلي

$$\left[L_{+}, L_{-}\right] = 2\hbar L_z \tag{7.34}$$

كذلك

$$\left[L_z, L_{\pm}\right] = \pm\hbar L_{\pm} \tag{7.35}$$

وأيضا يمكننا أن نثبت أن

$$\left[L^2, L_{\pm}\right] = 0 \tag{7.38}$$

إن لهذه العلاقة أهمية خاصة لكون $L_{\pm}$ لها علاقة مع L_x و L_y بالتعريف. بالتالي يمكننا توظيف هذه العلاقة لايجاد المتجهات المخصوصة والقيم المخصوصة لـ $L_{\pm}$ ومنها إيجاذ القيم المخصوصة للمركبات L_x و L_y.

الدوال المخصوصة لإجراءات الرفع والخفض

ما هو فعل الإجراء L_+ عندما يعمل على المتجه المخصوص $|lm>$؟

دعنا أولا ننظر في ما يلي

$$L_z L_+ |lm>= (L_+ L_z + \hbar L_+)|lm> (m+1)\hbar L_+ |lm>$$

بمعنى أن $L_+|lm>$ هو متجه مخصوص للإجراء L_z بقيمة مخصوصة قدرها $(m+1)\hbar$ ولما كانت هذه القيمة المخصوصة متعلقة بالمتجه الأعلى أي $|lm+1>$ جاز لنا أن نسمي الإجراء L_+ إجراء الرفع Raising Operator. بذات الوقت يمكِّننا هذا من أن نضع

$$L_+|lm>= C_+|lm+1>$$

ولإيجاد قيمة C_+ فإننا ننظر في العلاقة التالية

$$<L_+ lm|L_+|lm>=|C_+|^2$$

وهذا يعني أن

$$\begin{aligned}
&<L_+ lm|L_+ lm>=<lm|L_- L_+ lm> \\
&=<lm|L^2 - L_z^2 - \hbar L_z|lm> \\
&= l(l+1)\hbar^2 - m^2\hbar^2 - m\hbar^2 \\
&= [l(l+1) - m(m+1)]\hbar^2
\end{aligned}$$

وهكذا نجد أن

$$C_+ = \sqrt{l(l+1) - m(m+1)}\hbar \qquad (7.39)$$

مما يمكننا من أن نكتب

$$L_+|lm>= \sqrt{l(l+1) - m(m+1)}\hbar|lm+1> \qquad (7.40)$$

وكذا بالمثل يمكننا إيجاد العلاقة

$$L_z L_- |lm>= (L_- L_z - \hbar L_-)|lm> (m-1) L_- |lm>$$

بمعنى أن $L_-|lm>$ هو متجه مخصوص للإجراء L_z بقيمة مخصوصة قدرها $(m-1)$. ولما كانت هذه القيمة المخصوصة متعلقة بالمتجه الأدنى أي $|lm-1>$ جاز لنا أن نسمي الإجراء L_- إجراء الخفض Lowering Operator بذات الوقت يمكننا هذا من أن نكتب

$$L_- |lm>= C_- |lm>$$

ولإيجاد قيمة C_- فإننا ننظر في العلاقة التالية

$$< L_- lm | L_- lm >=| C_- |^2$$

ومنها نجد أن

$$C_- = \sqrt{l(l+1) - m(m-1)}\hbar \qquad (7.41)$$

وهكذا يكون لدينا

$$L_- |lm>= \sqrt{l(l+1) - m(m-1)}\hbar |lm-1> \qquad (7.42)$$

وبهذا تكتمل صياغة كافة العلاقات ومعادلات القيم المخصوصة.

حدود القيم المخصوصة

بما أن

$$\begin{aligned} &< L_\pm(lm) | L_\pm(lm) >=< lm | L_\mp L_\pm |lm> \\ &=< lm | L^2 - L_z^2 \pm \hbar L_z |lm> \qquad (7.43) \\ &= \hbar^2 \left[l(l+1) - m(m \mp 1) \right] \geq 0 \end{aligned}$$

فإن هذا يعني أن

$$\begin{aligned} &l(l+1) = m(m+1) \\ &l(l+1) = m(m-1) \end{aligned}$$

وبالتالي فإن $-l < m < l$ أي أن القيمة العظمى التي تأخذها m هي l وما بعدها قيمة والقيمة الدنيا هي $-l$ وما أدنى منها قيمة. لذلك نقول $L_+ | lm_{max} >= 0$ وكذلك $L_- | lm_{min} >= 0$.

من الواضح أن القيم المخصوصة لمركبة الزخم الزاوي تمثل مستويات متوالدة وعددها الكلي لأية قيمة معطاة من l هو $2l+1$. فضلا عن ذلك فإن قيم l نفسها تمثل توالداً لمستويات الطاقة وذلك لأن طاقة الإلكترون في الذرة تعتمد على قيمة n أساساً.

مثال: قلنا أن بالإمكان استخدام إجراءات الرفع والخفض لتحصيل المتجهات المخصوصة على مدى القيم المسموحة. ويمكن بها حساب الدوال للحالات الأدنى والحالات الأعلى من دوال معروفة. وفي هذا المثال نقدم نموذجا لهذا الحساب.

إذا علمت أن

$$Y_{22} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\phi}$$

فإحسب Y_{20}, Y_{21}. ؟

الحل: نعلم أن $L_Y_{22} = \sqrt{2\times 3 - 2\times 1}\hbar Y_{21} = 2\hbar Y_{21}$

وبالتالي فإن

$$Y_{21} = \frac{1}{2?} L_Y_{22} = \frac{1}{2} e^{-i\phi}\left(-\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta \frac{\partial}{\partial\phi}\right)\sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\phi}$$
$$= -2\sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin\theta\cos\theta e^{i\phi} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\theta\cos\theta e^{i\phi}$$

ولحساب Y_{20} نكرر تشغيل L_- على الدالة Y_{21} هذه المرة. ونترك هذا كواجب بيتي للطالب.

حساب قيم الزخم الزاوي وإحتمالياته

يمكننا ببساطة حساب القيم المتوقعة الزخم الزاوي ومركباته من خلال معرفتنا بدالة الموجة أو متجه الحالة. والمثال التالي يوضح كيفية تحصيل ذلك

مثال: جسيم يتحرك في ضمن مجال قوة مركزية تصفه دالة الموجة

$$\psi(x,y,z)=\frac{(xy+yz+zx)}{r^2}$$

ما هي احتمالية أن تكون قيمة مربع الزخم الزاوي صفراً. وما هي احتمالية حصولنا على $6\hbar^2$؟ إذا كانت $l=2$ فما هي الاحتماليات النسبية للحالات التي تكون فيها m=2, 1, 0, -1, -2؟

الحل: لغرض تأمين حساب الإحتمالية وطالما أن النظام يتمتع بصفة التناظر الكروي كونه مجال قوة مركزية فإن من الأفضل كتابة دالة الموجة بدلالة التوافقيات الكروية المناسبة ولهذا الغرض فإن لدينا

$$\frac{xy+yz+zx}{r^2}=\sin^2\theta\sin\phi\cos\phi+(\sin\phi+\cos\phi)\sin\theta\cos\theta$$

$$=\frac{1}{2}\sin^2\theta\frac{e^{2i\phi}-e^{-2i\phi}}{2i}+\sin\theta\cos\theta\left(\frac{e^{i\phi}-e^{-i\phi}}{2i}+\frac{e^{i\phi}+e^{-i\phi}}{2}\right)$$

وبالمقارنة مع جداول التوافقيات الكروية يمكننا بسهولة أن نجد أن

$$e^{2i\phi}\sin^2\theta=\sqrt{\frac{32\pi}{15}}Y_{2,2};\quad e^{-2i\phi}\sin^2\theta=\sqrt{\frac{32\pi}{15}}Y_{2,-2}$$

$$e^{i\phi}\sin\theta\cos\theta=-\sqrt{\frac{8\pi}{15}}Y_{2,1};\quad e^{-i\phi}\sin\theta\cos\theta=\sqrt{\frac{8\pi}{15}}Y_{2,-1}$$

لذلك يمكن أن نكتب

$$\frac{xy+yz+zx}{r^2}=\frac{1}{2}\sin^2\theta\frac{e^{2i\phi}-e^{-2i\phi}}{2i}+\sin\theta\cos\theta\left(\frac{e^{i\phi}-e^{-i\phi}}{2i}+\frac{e^{i\phi}+e^{-i\phi}}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{4i}\sqrt{\frac{32\pi}{15}}Y_{2,2}-\frac{1}{4i}\sqrt{\frac{32\pi}{15}}Y_{2,-2}-\frac{-i+1}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{15}}Y_{2,1}+\frac{i+1}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{15}}Y_{2,-1}$$

وهذا يعني أن دالة الموجة تنتسب إلى الحالة $l=2$ مما يعني أن إحتمالية أن تكون قيمة مربع الزخم الزاوي صفراً هي صفر. وإن إحتمالية أن تكون قيمة مربع الزخم الزاوي $6\hbar^2$ هي واحد صحيح نظراً لأن هذه القيمة هي لحالة $l=2$. لكن دالة الموجة لو كتبناها بدلالة اتوافقيات الكروية أعلاه فإنها لن تكون مقومة وعلينا تقويمها. ولهذا لدينا مربع المعاملات هو $\frac{2\pi}{15}+\frac{2\pi}{15}+\frac{4\pi}{15}+\frac{4\pi}{15}=\frac{12\pi}{15}=\frac{4\pi}{5}$، لذلك ينبغي أن نضرب في $\sqrt{\frac{5}{4\pi}}$ وبذلك تصبح الدالة مقومة ومنها نحسب إحتمالية القيم المطلوبة $P_{+2}=P_{-2}=\frac{5}{2\pi}\frac{2\pi}{15}=\frac{1}{6}$ وكذلك بالمثل نحسب $P_{+1}=P_{-1}=\frac{1}{3}$

العناصر المصفوفية للزخم الزاوي

من السهل أن نحسب العناصر المصفوفية لمربع الزخم الزاوي وهي

$$<l^{'}m^{'}|L^2|lm>=l(l+1)\hbar^2<l^{'}m^{'}|lm>$$
$$=l(l+1)\hbar^2\delta_{l^{'}l}\delta_{m^{'}m}$$

وبالنسبة للمركبة z فإن العناصر هي

$$<l^{'}m^{'}|L_z|lm>=m\hbar<l^{'}m^{'}|lm>$$
$$=m\hbar\delta_{l^{'}l}\delta_{m^{'}m}$$

كذلك فإن من السهل أن نجد أن

$$<l^{'}m^{'}|L_+|lm>=\sqrt{l(l+1)-m(m+1)}\hbar<l^{'}m^{'}|lm+1>$$
$$=\sqrt{l(l+1)-m(m+1)}\hbar\delta_{l^{'}l}\delta_{m^{'}m+1}$$

وكذلك فإن

$$< l^{'}m^{'} | L_{-} | lm >= \sqrt{l(l+1)-m(m-1)}\hbar < l^{'}m^{'} | lm-1 >$$
$$= \sqrt{l(l+1)-m(m-1)}\hbar \delta_{l^{'}l}\delta_{m^{'}m-1}$$

ومن هذا نتمكن من ايجاد التمثيل المصفوفي للإجراءات L^2 و L_z ، L_+ و L_- وبقية المركبات.

مثال: أوجد التمثيل المصفوفي للزخم الزاوي $l = l^{'} = 1$

الحل: هنا لدينا القيم المخصوصة للمركبة z كما يلي $m = 1,0,-1$ بمعنى أن العناصر المصفوفية لـ L^2 ستكون قطرية وهي

$$< L^2 >= \hbar^2 \begin{pmatrix} <1,1| L^2 |1,1> & <1,1| L^2 |1,0> & <1,1| L^2 |1,-1> \\ <1,0| L^2 |1,1> & <1,0| L^2 |1,0> & <1,0| L^2 |1,-1> \\ <1,-1| L^2 |1,1> & <1,-1| L^2 |1,0> & <1,-1| L^2 |1,-1> \end{pmatrix}$$
$$= 2\hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

وبالمثل يمكن حساب عناصر المصفوفة L_z

$$< L_z >= \hbar \begin{pmatrix} <1,1| L_z |1,1> & <1,1| L_z |1,0> & <1,1| L_z |1,-1> \\ <1,0| L_z |1,1> & <1,0| L_z |1,0> & <1,0| L_z |1,-1> \\ <1,-1| L_z |1,1> & <1,-1| L_z |1,0> & <1,-1| L_z |1,-1> \end{pmatrix}$$
$$= \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

أما العناصر المصفوفية لـ L_+ فهي

$$< L_+ >= \hbar\begin{pmatrix} <1,1|L_+|1,1> & <1,1|L_+|1,0> & <1,1|L_+|1,-1> \\ <1,0|L_+|1,1> & <1,0|L_+|1,0> & <1,0|L_+|1,-1> \\ <1,-1|L_+|1,1> & <1,-1|L_+|1,0> & <1,-1|L_+|1,-1> \end{pmatrix}$$

$$= \sqrt{2}\hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

وبنفس هذه الطريقة نحسب

$$< L_- >= \sqrt{2}\hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ومن $< L_+ >$ و $< L_- >$ نتمكن من حساب العناصر المصفوفية لـ$< L_x >$ و $< L_y >$ حيث نستخدم تعريفاتهما كما في (7.29) و(7.30) ومنها نجد أن

$$< L_x >= \frac{1}{2}\left(< L_+ > + < L_- >\right)$$

$$= \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

كذلك

$$< L_y >= \frac{1}{2}\left(< L_+ > + < L_- >\right)$$

$$= \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

ظاهرة أو تأثير زيمان Zeeman Effect

لاحظ زيمان أنه عند وضع بخار المواد تحت تأثير مجال مغناطيسي خارجي فإن خطوطها الطيفية تظهر تضاعفات تدل على وجود مستويات متوالدة للطاقة. وتظهر هذه المستويات كخطوط مزاحة على يمين ويسار الخط الأصلي، وكأن تلك الخطوط الطيفية كانت خطاً واحداً تفرع تحت تأثير المجال المغناطيسي الخارجي إلى خطوط أخرى. وهذه التضاعفات سببها العزم المغناطيسي للإلكترون المكتسب من خلال دوران الإلكترون حول النواة. وتبلغ عدد التضاعفات لكل مستوى من مستويات الزخم الزاوي $(2l+1)$. ويسمى هذا التضاعف تأثير زيمان العادي Normal Zeeman Effect.

وكما هو واضح فإن الحالة الدنيا للزخم الزاوي المداري التي قيمتها $l=0$ لا ينبغي أن يظهر فيها أي تضاعف لأن عدد الخطوط هو واحد فقط. إلا أن التجارب أظهر إنشطار خط الحالة الدنيا إلى خطين متماثلين. وهذا ما يوحي بوجود توالد من نوع جديد. وقد سمي هذا تأثير زيمان الشاذ Anomalous Zeeman Effect. وقد تم تفسيره لاحقا بوجود عزم مغناطيسي ذاتي للإلكترون ناتج عن دوران الإلكترون حول نفسه كما تدور الأرض حول نفسها لكن هذا التصور لم يتحقق وتبين لاحقا أن العزم الذاتي للإلكترون هو صفة كمومية خالصة.

أسئلة مفاهيمية حول الزخم الزاوي

1. هنالك فرقان أساسيان بين الزخم الزاوي في التصور الكلاسيكي وفي التصور الكمومي ما هما؟
2. ماذا تمثل القيم المخصوصة للمركبة z للزخم الزاوي؟ هل لها علاقة بالتوالد؟
3. هل تنطبق العلاقات التبادلية للزخم الزاوي على إجراءات التدوير الماكروسكوبي؟ جرب ذلك مع كتاب مثلاً.
4. ما أهمية العلاقات التبادلية لإجراءات الزخم الزاوي؟
5. هل أن إجراءات الرفع والخفض هي إجراءات هرمايتية؟
6. ما هو تأثير زيمان العادي؟ وما تأثير زيمان الشاذ؟
7. بماذا يوحي لنا تأثير زيمان الشاذ؟
8. هل أن دوال الزخم الزاوي متوالدة؟ ما مقدار التوالد؟

مسائل الفصل السابع

س1) جد مستويات الطاقة لجسيم يتحرك مقيداً على سطح كرة قطرها r.

س2) جد مستويات الطاقة الدورانية لجزيئة ثنائية الذرة.

س3) لديك المتجه $|lm>= N\left[2|10>+4|11>-2|10>+\sqrt{5}|1-1>\right]$

إحسب N ثم $<L_z>$ و $<L_->$.

س3) افترض نظاماً يكون ابتداء في الحالة

$$\psi(\theta,\phi)=\frac{1}{\sqrt{5}}Y_{1,-1}(\theta,\phi)+\sqrt{\frac{3}{5}}Y_{1,0}(\theta,\phi)+\frac{1}{\sqrt{5}}Y_{1,1}(\theta,\phi)$$

جد $<\psi|L_+|\psi>$.

إذا تم قياس L_z فما القيم التي سنحصل عليها؟ وبأي إحتماليات؟

إذا ما جاء قياس $L_z=-\hbar$ إحسب اللادقة ΔL_x و ΔL_y ومضروبهما.

س4) (أ) باستخدام العلاقات التبادلية بين مركبات الزخم الزاوي برهن أن $[L^2,L_z]=0$ موضحا كافة الخطوات.

(ب) برهن أن $[L_+,L_-]=2\hbar L_z$

الفصل الثامن

معادلة شرودنجر في ثلاثة أبعاد

سنعرض في هذا الفصل لمسائل في ثلاثة أبعاد مستهدفين بيان إختلافها عن المسائل التي في بعد واحد حيث تظهر لدينا مظاهر جديدة وأخصها ظاهرة التوالد Degeneracy. إن أسلوب حل معادلة شرودنجر في ثلاثة أبعاد لا يختلف كثيرا عن حلها في بعد واحد سوى في درجة التعقيد. إلا من حيث ظهور توالد الحالات بوضوح في المسائل التي سنعالجها.

في هذا الفصل سنعالج مسألتين مهمتين: الأولى مسألة جسيم حر في صندوق ذي جدران صلبة، والمسألة الثانية هي ذرة الهيدروجين وأشباهها ندرسها هذه المرة بتفصيل كبير وسنعمل على حساب دوال الموجة والطاقات للمستويات المختلفة كما سنجد التوالد الحاصل في مستويات الطاقة.

مسألة جسيم في صندوق صلب ذي ثلاثة أبعاد

يوصف الجهد في هذه الحالة بأنه

$$\begin{aligned} V(x,y,z) &= \infty \qquad x<0 \\ V(x,y,z) &= 0 \qquad 0 \le x \le L \\ V(x,y,z) &= \infty \qquad x>0 \end{aligned} \tag{8.1}$$

ومنها نستطيع تأليف معادلة شرودنجر في ثلاثة أبعاد

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi(x,y,z)=E\psi(x,y,z)$$

وهذه يمكن إعادة كتابتها كما يلي

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi(x,y,z)+k^2\psi(x,y,z)=0 \tag{8.2}$$

حيث أن

$$k^2=k_x^2+k_y^2+k_z^2=\frac{2mE}{\hbar^2} \tag{8.3}$$

إسترشاداً بالمسألة التي عالجناها في بعد واحد نجد الحل العام للمعادلة (8.3) هو

$$\psi_{lmn}(x,y,z)=\left(\frac{2}{L}\right)^{3/2}\sin(k_x x)\sin(k_y y)\sin(k_z z) \qquad (8.4)$$

وبموجب الشروط الحدودية فإن

$$k_x=\frac{\pi n_x}{L},\ k_y=\frac{\pi n_y}{L},\ k_z=\frac{\pi n_z}{L} \qquad (8.5)$$

وبالتعويض عن هذه المتغيرات في (8.3) يمكننا أن نحسب مستويات طاقة الجسيم في الصندوق وهي

$$E_{nml}=\frac{({n_x}^2+{n_y}^2+{n_z}^2)\pi^2\hbar^2}{2mL^2} \qquad (8.6)$$

حيث أن $n_x, n_y, n_z, =1,2,3...$

التوالد في طاقة الجسيم

من الواضح أن الصيغة (8.6) تتضمن توالداً لمستويات الطاقة الممكنة. ذلك لأن مستوى الطاقة الأدنى هو الذي يتحصل من تعويض $n_x=n_y=n_z=1$ أي أن

$$E_{111}=\frac{3\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$$

وهذا المستوى ليس فيه توالد. أما دالة الموجة فهي

$$\psi_{111}(x,y,z)=\left(\frac{2}{L}\right)^{3/2}\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{L}y\right)\sin\left(\frac{\pi}{L}z\right) \qquad (8.7)$$

أما المستوى الثاني، أي الحالة المثارة الأولى، فتتحصل من $l=2, m=n=1$ أو $l=1, m=2, n=1$ أو $l=1, m=1, n=2.$ إذن لدينا ثلاث مستويات لها نفس الطاقة وهذه هي مستويات متوالدة، أي أن

$$E_{211}=\frac{6\pi^2\hbar^2}{2mL^2},\ E_{121}=\frac{6\pi^2\hbar^2}{2mL^2},\ E_{112}=\frac{6\pi^2\hbar^2}{2mL^2} \qquad (8.8)$$

ولذلك نقول أن المستوى الثاني هي حالة متوالدة بثلاثة أضعاف. وهكذا دواليك.

إن ظهور التوالد مرتبط بالتناظر الذي تحتويه المسألة. فهنا الصندوق متناظر على الأبعاد الثلاثة ولو كانت الأبعاد مختلفة لما ظهر التوالد. وسوف نرى التوالد في مسألة ذرة الهيدروجين ايضاً.

مبدأ الإستثناء ودوره في حساب الطاقة

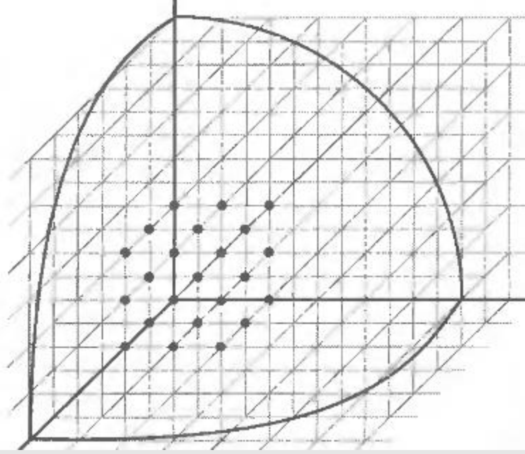
يمكننا الآن أن نناقش عدد حالات الطاقة لجسيمات من الفرميونات غير المتفاعلة Noninteracting التي يمكن أن يحتويها صندوق ذي ثلاثة أبعاد. وهذه المناقشة ضرورية لكون الفيرميونات هي المكون الرئيسي للمادة. وفي هذا الحساب يتنافس عاملان مهمان يجب أخذهما بالحسبان. الأول وجود التوالد وهو الذي يؤثر في عدد مستويات الطاقة، والآخر هو مبدأ الإستثناء لباولي، الذي يقرر أنه لايمكن جمع أكثر من فيرميونين في مستوى واحد من الطاقة. والآن لو تصورنا أن الإلكترونات تؤلف غازاً يتوزع على حجم صندوق مكعب بعده L فإننا في فضاء مثل هذا الصندوق يمكن أن نتحدث عن كل نقطة بأنها تمثل نقاط شبيكية Lattice Points لكونها أشبه بخلية لها ثلاث أركان هي $\{n_x, n_y, n_z\}$. والسؤال الضروري الذي نطرحه هو: ما عدد الثلاثيات من الأعداد الصحيحة $\{n_x, n_y, n_z\}$ التي يمكن أن يحتويها الصندوق من مستويات الطاقة التي هي أقل من قدر معين E_F؟

إن هذه الأعداد الثلاثية يمكن أن تؤلف فضاء حجمياً على شكل ثمن كرة قطرها R (كما في الشكل 8-1) وهو بحسب المعادلة (8.6) يكون

$$n_x{}^2 + n_y{}^2 + n_z{}^2 = R^2 = \left(\frac{2mE_F}{\pi^2 \hbar^2} L^2 \right) \qquad (8.9)$$

وهذا يؤلف فضاء يغطي ثمن حجم الكرة التي نصف قطرها R وبالتالي فإن عدد النقاط الشبيكية Lattice Points الكلي في ثمن الكرة هو

$$\frac{1}{8}\frac{4\pi}{3}R^{3}=\frac{1}{8}\frac{4\pi}{3}\left(\frac{2mE_{F}}{\pi^{2}\hbar^{2}}L^{2}\right)^{3/2}$$



الشكل (8–1) حالات الطاقة في ثمن الكرة

ولما كانت كل نقطة شبيكية يمكن أن تحوي على إلكترونين فقط، أحدهما ببرم علوي والآخر ببرم سفلي، فإن العدد الكلي للإلكترونات التي تحتويها مستويات الطاقة التي هي أقل من E_F هي

$$N=\frac{\pi}{3}L^{3}\left(\frac{2mE_{F}}{\pi^{2}\hbar^{2}}\right)^{3/2} \tag{8.10}$$

ومن الواضح أن عدد الإلكترونات متناسب طرديا مع حجم الصندوق. وبدلالة الكثافة العددية للإلكترونات أي

$$n=\frac{N}{L^{3}}$$

فإن

$$E_F = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m}\left(\frac{3n}{\pi}\right)^{2/3} \tag{8.11}$$

تسمى هذه الطاقة طاقة فيرمي Fermi Energy وهي القدر الأعظم الذي يمكن أن يمتلكه إلكترون في المستوى الأدنى من الطاقة (المستوى الأرضي) في حيز يحتوي على غاز إلكتروني كثافته العددية n. بمعنى أن طاقة فيرمي تعتمد على الكثافة العددية وتتناسب طرديا مع مربع جذرها التكعيبي.

إن الطاقة الكلية التي يحتويها الصندوق ستكون الطاقة التي في ثمن الكرة التي قطرها R والتكامل يكون على الأبعاد الثلاثة أي

أن

$$\begin{aligned} E_{total} &= 2\frac{\pi^2\hbar^2}{2m}\frac{1}{8}\int n^2 d^3n \\ &= \frac{\pi^2\hbar^2}{8m}4\pi\int_0^R n^4 dn \\ &= \frac{\pi^3\hbar^2}{10mL^2}R^5 \end{aligned} \tag{8.12}$$

ولما كان عدد الإلكترونات يرتبط بالحجم بالعلاقة

$$N = 2\frac{1}{8}\frac{4\pi}{3}R^3 = \frac{\pi}{3}R^3$$

فإن

$$\begin{aligned} E_{total} &= \frac{\pi^3\hbar^2}{10mL^2}\left(\frac{3N}{\pi}\right)^{5/3} \\ &= \frac{\pi^3\hbar^2}{10m}\left(\frac{3n}{\pi}\right)^{5/3}L^3 \end{aligned}$$

(8.13)

من الواضح أن الطاقة الكلية تعتمد على حجم الصندوق وتعتمد أيضا على الكثافة الحجمية للإلكترونات فيه. وهنا نلاحظ مايلي

أولاً: أنه لما كان

$$E_F = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m}\left(\frac{3n}{\pi}\right)^{2/3} = \frac{k_F^2\hbar^2}{2m}$$
(8.14)

فإن هذا يعني أن العدد الموجي هو

$$k_F = (3\pi^2 n)^{1/3}$$

وبما أن $k = 2\pi/\lambda$ فإن

$$\lambda_F = 2.03n^{-1/3}$$

ولما كانت $n^{-1/3}$ هي بالتقريب المسافة البينية للجسيمات d فإن بالإمكان القول أن

$$d = \frac{\lambda_F}{2} \qquad (8.15)$$

وهذا يعني أن الإلكترونات ينبغي أن تكون منفصلة عن بعضها بمسافة لا تقل عن نصف طول موجة دي بروي الممثلة لها. ومن المعروف أن ذلك يعتمد على الطاقة الحركية التي تمتلكها الإلكترونات وبالتالي على درجة حرارة الغاز الإلكتروني.

وثانياً: إذا كان عدد اللأكترونات ثابتاً فيمكننا كتابة النتيجة () بالشكل التالي

$$E_{total} = \frac{\pi^3\hbar^2}{10m}\left(\frac{3N}{\pi}\right)^{5/3} V^{-2/3} \qquad (8.16)$$

وإذا كان عدد الإلكترونات كبيراً جداً فإن هذه النتيجة ستكون غير معتمدة على شكل الصندوق.

مثال: طاقة فيرمي للجسيمات فوق النسبوية Ultrarelativistic

لو أردنا حساب طاقة فيرمي لجسيمات عديمة الكتلة أو الجسيمات فوق النسبوية التي تكون سرعاتها قريبة من سرعة الضوء حيث أن $E = pc$ فإننا أولاً ينبغي أن نحصل على الزخم وهو $p = \frac{\pi\hbar}{L}\sqrt{{n_x}^2 + {n_y}^2 + {n_z}^2}$

وهكذا فإن

$$E = pc = \frac{\pi\hbar c}{L}\sqrt{{n_x}^2 + {n_y}^2 + {n_z}^2}$$

بالتالي فإن

$$R^2 = {n_x}^2 + {n_y}^2 + {n_z}^2 = \left(\frac{E_F}{\pi\hbar c}\right)^2 L^2$$

وهكذا نحسب

$$N = \frac{\pi}{3}R^3 = \frac{\pi}{3}\left(\frac{E_F}{\pi\hbar c}\right)^3 L^3$$

وهذا يعني أن طاقة فيرمي للجسيمات فوق النسبوية

$$E_F = \pi\hbar c\left(\frac{3n}{\pi}\right)^{1/3}$$

ضغط التوالد ودوره في الفيزياء الفلكية

من التطبيقات المهمة لتأثير التوالد في مستويات طاقة الإلكترونات حصول ضغط مهم داخل الأجسام المنضغطة. فلو أن كمية من الغاز الإلكتروني إنضغطت فإن هذا سيودي إلى تقليص المسافة بينها مما يعني بموجب المعادلة (8.15) إلى تقليص طول موجة دي بروي وهذا سيؤدي إلى زيادة الزخم وبالتالي ارتفاع طاقتها. ويعني هذا تصاعد الضغط الداخلي كلما ازداد الضغط الخارجي. وهذا ما يسمى ضغط التوالد. وهذا هو

$$P_{\deg} = -\frac{\partial E_{total}}{\partial V} = \frac{\pi^3\hbar^2}{15m}\left(\frac{3n}{\pi}\right)^{5/3} \qquad (8.17)$$

يعرف معامل الجملة Bulk Modulus للمادة كما يلي

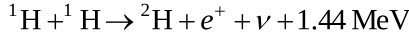
$$B = -V\frac{\partial P}{\partial V}$$

وهذا يعني أن

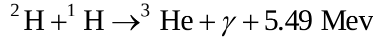
$$B = \frac{\pi^3\hbar^2}{9m}\left(\frac{3n}{\pi}\right)^{5/3} \qquad (8.18)$$

إن استخدام نموذج الغاز الإلكتروني هذا يعطينا نتيجة برتبة مقدارية صحيحة لمعامل الجملة B. مثال ذلك إذا أخذنا الصوديوم فإن $n = 2.65\times10^{22}\,\text{cm}^{-3}$ فإننا نجد $B = 9.2\times10^{10}\,\text{dyne}/\text{cm}^3$ والقيمة التجريبية هي $B = 6.4\times10^{10}\,\text{dyne}/\text{cm}^3$.

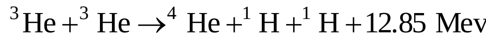
ومن المعروف أن ضغط التوالد الإلكتروني يلعب دوراً مهماً في تحديد مصائر النجوم التي تمر بتغيرات كبيرة خلال المراحل النهائية من حياتها حيث تستنفذ وقودها الهيدروجيني وتمر بمرحلة اندماج نظائر الهليوم وفقا للتفاعلات النووية التالية



$${}^1\text{H} + {}^1\text{H} \rightarrow {}^2\text{H} + e^+ + \nu + 1.44\,\text{MeV}$$

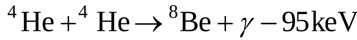


$${}^2\text{H} + {}^1\text{H} \rightarrow {}^3\text{He} + \gamma + 5.49\,\text{Mev}$$

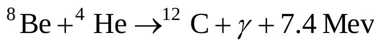


$${}^3\text{He} + {}^3\text{He} \rightarrow {}^4\text{He} + {}^1\text{H} + {}^1\text{H} + 12.85\,\text{Mev}$$

وبعد استنفاذ الهيدروجين وتحويله إلى هليوم ينخفض الضغط الداخلي للنجم فيحصل انهيار جاذبي حيث يتكور النجم على نفسه وينكمش فترتفع درجة حرارة باطن النجم حتى تصل إلى قدر تندمج معه نوى ذرات الهليوم لتتحول بالنهاية إلى كربون



$${}^4\text{He} + {}^4\text{He} \rightarrow {}^8\text{Be} + \gamma - 95\,\text{keV}$$



$${}^8\text{Be} + {}^4\text{He} \rightarrow {}^{12}\text{C} + \gamma + 7.4\,\text{Mev}$$

وتستمر التفاعلات والاندماجات النووية فتتكون عناصر أثقل وأثقل حتى نصل عنصر الحديد. ويستمر التكوير الجاذبي حتى تنشأ القوة الداخلية والضغط الداخلي اللازم ليمنع إستمرار التكوير.

يمكن حساب الضغط الجاذبي المتولد من تراكم المادة في باطن النجم ببساطة إذا إفترضنا أن توزيع المادة داخل النجم يكون توزيعا كروياً متجانساً ومتناسقاً. وإن الطاقة الوضع لأي جزء على شكل حلقة تتراوح ما بين r و $r+dr$ هو

$$dV_g = -G\frac{\left(4\pi\rho r^3/3\right)\left(4\pi\rho r^2 dr\right)}{r} = -\frac{(4\pi)^2 G\rho^2}{3} r^4 dr$$

وهذا يعني أن الطاقة التي تحتويها كرة قطرها R هو

$$V_g = -\frac{(4\pi)^2 G\rho^2}{3}\int_0^R r^4 dr = -\frac{(4\pi)^2 G\rho^2}{15} R^5 \qquad (8.19)$$

وهنالك أيضا العلاقة بين كثافة المادة ونصف قطر النجم وعدد النيوكليونات المؤلفة للنجم وهي

$$\frac{4\pi}{3}\rho R^3 = M = Nm_n \qquad (8.20)$$

ومن هذه العلاقات نجد أن

$$V_g = -\frac{3}{5}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} G(Nm_n)^2 V^{-1/3} \qquad (8.21)$$

وهكذا يكون الضغط الجاذبي هو

$$P_g = -\frac{\partial V_g}{\partial V} = -\frac{1}{5}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} G(Nm_n)^2 V^{-4/3}$$
(8.22)

إن هذا الضغط الذي يدفع بإتجاه انكماش النجم تتم مقاومته بواسطة ضغط التوالد الذي حسبناه آنفاً وبالتالي فإن

$$P_{\deg} = \frac{\pi^3\hbar^2}{15m}\left(\frac{3n}{\pi}\right)^{5/3} = \frac{\pi^3\hbar^2}{15m}\left(\frac{3N_e}{\pi}\right)^{5/3} V^{-5/3}$$
(8.23)

حيث أن N_e هو عدد الإلكترونات ويساوي عدد البروتونات في النجم. ولهذا السبب نأخذ العدد الكلي للفرميونات على أنه $N=2N_e$ أي أن $N/2\,N_e=1$.

عندما يتساوى الضغط الجاذبي مع ضغط التوالد يكون

$$\frac{\pi^3\hbar^2}{15m}\left(\frac{3N_e}{\pi}\right)^{5/3}V^{-5/3}=\frac{1}{5}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3}G\left(Nm_n\right)^2V^{-4/3} \qquad (8.24)$$

وهذا يعني أن حالة تساوي الضغطين تحصل عندما يصل قطر النجم إلى

$$R^*=\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/3}V^{1/3}=\left(\frac{81\pi^2}{128}\right)^{1/3}\frac{\hbar^2}{Gm_em_e^2}N^{-1/3} \qquad (8.25)$$

وإذا كان النجم مماثلا للشمس فإن كتلته هي بحدود $2\times10^{30}\text{Kg}$ وعلى افتراض أن معظمها مؤلف من غاز الهيدروجين فإن عدد الفيرميونات (البروتونات والإلكترونات) فيها هو بحدود

$$N=\frac{2\times10^{30}}{1.67\times10^{-27}}=1.2\times10^{57} \qquad (8.26)$$

وبالتعويض في (8.25) فإننا نجد أن ضغط التوالد سوف يتمكن من وقف إنهيار النجم عندما يصل نصف قطره إلى $R^*=1.1\times10^4\text{km}$.

أي أنه عندما تنكمش الشمس ليصبح حجمها أصغر من الأرض فإن ضغط التوالد الإلكتروني داخلها يعادل الضغط الجاذبي الكتلوي وبالتالي تصير الشمس جرما متوازناً مستقراً. أما إذا كانت كتلة النجم أكبر من 1.4 كتلة شمسية فإن ضغط التوالد الإلكتروني لن يكفي للإسناده بالتالي سيستمر الإنكماش حتى تنسحق الذرات وتداخل الإلكترونات مع البروتونات ويتحول لب النجم إلى كتلة نيوترونية صرفة ويسمى هذا "نجم نيوتروني" Neutron Star . إن توازن النجم النيوتروني يقوم على تعادل ضغط التوالد النيوتروني مع ضغط التجاذب الكتلوي ويمكننا بنفس الطريقة السابقة حساب نصف قطر النجم

النيوتروني الذي يحصل عنده مثل هذا التوازن. ولكن من الضروري هنا مراعاة ان الطاقة الحركية للفيرميونات لن تكون على الصيغة الكلاسيكية $p^2/2m$ بل ستكون بالصيغة النسبوية $E = pc$ مع استبدال كتلة الإلكترونات بكتلة النيوترونات والعدد الإلكتروني بالعدد N لنحصل على الصيغة

$$R_n^* = \left(\frac{81\pi^2}{16}\right)^{1/3} \frac{\hbar^2}{Gm_n^3} N^{-1/3}$$

وإذا ما عوضنا عن كتلة النجم بضعف كتلة الشمس مثلا لوجدنا أن $R^* \approx 10\text{km}$ ، وهذا هو في العادة نصف قطر النجوم النيوترونية.

ذرة الهيدروجين وأشباهها

كان نيلز بور كما قدمنا في الفصل الأول قد قدم نموذجا للذرة قائما على جملة فروضات استقرأها من خلال دراسته لأطياف العناصر ونظره في السلاسل الطيفية والصياغات الوضعية التي وضعت لهذه السلاسل. إلا أن نموذج بور كان محدوداً وتقريبيا فهو لم يأخذ بنظر الاعتبار حركة نواة الذرة بل اعتبرها ساكنة تماما وهذا غير صحيح لأن النواة والإلكترون يدوران حول مركز الكتلة المشترك بينهما. من جانب آخر فإن فرضيات بور لا أساس لها إلا من باب الإستقراء التجريبي كما قلت. لذلك لجأ الفيزيائيون بعد عام 1926 الى معالجة ذرة الهيدروجين عبر حل معادلة شرودنجر لذرة الهيدروجين وأشباهها في ثلاثة أبعاد. والمقصود بأشباه الهيدروجين نظائره التي تختلف عن بعضها في مقدار كتلة النواة وهما الديتوريوم والتريتيوم، وكذلك أيون الهليوم He^+ وأيون اللثيوم الثنائي Li^{++} وهكذا. وهنا تكشَّفت أمامهم حقائق جديدة عن الذرة وظهر أن الطيف الذري يتضمن تفاصيل دقيقة لم يستطع نموذج بور الكشف عنها. فضلا عن أن مدارات الإلكترون لم تعد دائرية تامة بل

تبين أن منها ما هو دائري وما هو إهليلجي. وهكذا أغنت حلول معادلة شرودنجر لذرة الهيدروجين وأشباهها علم الفيزياء الذرية عنى كبيراً.

سنقدم في هذا الفصل معالجة مستفيضة لمعادلة شرودنجر في ثلاثة ابعاد آخذين بنظر الإعتبار الحركة الدقيقة لنواة الذرة حول مركز الكتلة. ويمكن إيجاد إحداثيات مركز الكتلة لحركة النواة والإلكترون من المعادلتين $m_n r_n = m_e r_e$ و $r_n + r_e = r$ ، ومنهما نجد أن

$$r_n = \frac{m_e}{m_n + m_e} r \qquad (8.9)$$

كذلك

$$r_e = \frac{m_n}{m_n + m_e} r \qquad (8.10)$$

وبالتالي فإننا لن نتعامل مع كتلة الإلكترون القياسية في المعادلة بل سنضع كتلة أخرى تسمى الكتلة المنقوصة reduced mass وهي

$$\mu = \frac{m_n m_e}{m_n + m_e} \qquad (8.11)$$

إن القوة الفاعلة للحركة بين الإلكترون ونواة الذرة هي القوة الكهربائية حيث أن شحنة الإلكترون هي e وشحنة النواة هي Ze إذ يمثل Z العدد الذري أي عدد الشحنات الموجبة داخل نواة الذرة. بالتالي فإن الجهد الكهربائي بين الإلكترون ونواة الذرة هو

$$V(r) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r} \qquad (8.12)$$

ولما كان هذا الجهد غير معتمد على الزمن فإن معادلة شرودنجر للأكترون تكون

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\psi(x,y,z) + V(x,y,z)\psi(x,y,z) = E\psi(x,y,z)$$
(8.13)

ونظراً لأن النظام متناظر كروياً فإن من الأنسب استخدام الاحداثيات القطبية الكروية

$$x = r\sin\theta\cos\phi$$
$$y = r\sin\theta\sin\phi \qquad (8.14)$$
$$z = r\cos\theta$$

وهنا نستخدم

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$
$$= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right) \qquad (8.15)$$
$$= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{L^2}{\hbar^2 r^2}$$

حيث أن L^2 هو مربع إجراء الزخم الزاوي الذي درسناه في الفصل السابق. وإذا ما أستعملنا

$$L^2\psi = l(l+1)\hbar^2\psi \qquad (8.16)$$

فإن معادلة شرودنجر في ثلاثة أبعاد وبدلالة الإحداثيات الكروية القطبية تصبح

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2\mu}{\hbar^2}\left(E + \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2}\right)\right]\psi(r,\theta,\phi) = E_{nl}\psi(r,\theta,\phi)$$

وإذا ما استخدمنا طريقة فصل المتغيرات فإن بالإمكان وضع الحل كما يلي

$$\psi = \psi_{nlm}(r,\theta,\phi) = R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta,\phi) \qquad (8.17)$$

وبالتعويض في المعادلة السابقة نحصل على المعادلة التفاضلية الخاصة بالجزء القطري Radial Part وهي

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2\mu}{\hbar^2}\left(E + \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2}\right)\right]R_{nl}(r) = E_{nl}R_{nl}(r)$$
(8.18)

حيث أننا استخدمنا المعادلة التي تعبر عن القيم المخصوصة للزخم الزاوي

$$L^2\psi = l(l+1)\hbar^2\psi$$

إن حل المعادلة (8.18) ممكن بالطريقة التحليلية حيث نعمل على إعادة صياغتها لتصبح قابلة للتبسيط بفرض شروط وتقريبات معينة ثم نلجأ الى صياغة الحل بشكل سلسلة ومنها نحصل على علاقات التكرار. وبعدها نتمكن من ايجاد القيم المخصوصة للطاقة.

لنعرّف المتغير الجديد

$$\rho = \sqrt{\frac{8\mu|E|}{\hbar^2}}\,r \tag{8.19}$$

ولنعوض هذا في (8.10) لنحصل على

$$\frac{d^2R(\rho)}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{dR(\rho)}{d\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2}R(\rho) + \left(\frac{\lambda}{\rho} - \frac{1}{4}\right)R(\rho) = 0 \tag{8.20}$$

حيث أن

$$\lambda = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar}\sqrt{\frac{\mu}{2|E|}} = Z\alpha\sqrt{\frac{\mu c^2}{2|E|}} \tag{8.21}$$

حيث أن $\alpha = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c}$

طيف الطاقة

إذا كانت ρ كبيرة فإن المعادلة (8.12) يمكن تقريبها كما يلي

$$\frac{dR(\rho)}{d\rho^2} - \frac{1}{4}R(\rho) = 0 \tag{8.22}$$

والحل هو

$$R(\rho) \approx e^{-\rho/2} \tag{8.23}$$

والآن ولغرض تعميم هذا الحل ينبغي أن ندخل دالة جديدة فنقول أن

$$R(\rho) = G(\rho)e^{\rho/2} \tag{8.24}$$

وبالتعويض في المعادلة (8.14) نحصل على المعادلة التفاضلية التي تحكم G

$$\frac{d^2G}{d\rho^2} - \left(1 - \frac{2}{\rho}\right)\frac{dG}{d\rho} + \left[\frac{\lambda - 1}{\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right]G = 0 \tag{8.25}$$

والآن نقول إذا كانت ρ صغيرة جدا (أي في المنطقة قرب المركز) فإن المعادلة تصبح

$$\frac{d^2G}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{dG}{d\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2}G = 0 \tag{8.26}$$

وحل هذه المعادلة هو أن $G(\rho) \propto \rho^l$ بمعنى أن

$$G(\rho) = \rho^l H(\rho) \tag{8.27}$$

وبالتعويض في المعادلة (8.17) نحصل على المعادلة التفاضلية التي تحكم الدالة الجديدة H وهي

$$\frac{d^2H}{d\rho^2} + \left(\frac{2l+2}{\rho} - 1\right)\frac{dH}{d\rho} + \frac{\lambda - l - 1}{\rho}H = 0 \tag{8.28}$$

والآن دعنا نجرب حل المتسلسلة

$$H(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \rho^k \tag{8.29}$$

وبالتعويض في المعادلة التفاضلية (8.20) نجد أن

$$\sum_{k=0}^{k=\infty} a_k \left[k(k-1)\rho^{k-2} + k\left(\frac{2l+2}{\rho} - 1\right)\rho^{k-1} + (\lambda - l - 1)\rho^{k-1}\right] = 0$$

ويمكن إعادة تنظيم هذه المعادلة كما يلي

$$\sum_{k=0}^{k=\infty} \rho^{k-1}\left[(k+1)(k+2l+2)a_{k+1} + (\lambda - l - 1 - k)a_k\right] = 0$$

وهذه تقودنا الى علاقة التكرار

$$\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{k+l+1-\lambda}{(k+2l+2)(k+1)} \qquad (8.30)$$

وإذا كانت قيمة k كبيرة نحصل على

$$\frac{a_{k+1}}{a_k}\to\frac{1}{k}$$

وهذا يعني أن

$$a_{k+1}\approx\frac{1}{k!} \qquad (8.\ 31)$$

إن متسلسلة H يجب أن تكون منتهية لكي نحصل على حل فيزيائي مقبول وهذا يحتم علينا أن يكون

$$\lambda=k+l+1 \qquad (8.32)$$

ولو أننا استبدلنا بعض الرموز $\lambda\to n,\ k\to n_r$ فإن هذا الشرط يصير

$$n=n_r+l+1 \qquad (8.33)$$

ولما كانت $n_r\geq 0$ فإن $n\geq l+1$ وهي بالتالي عدد صحيح والآن إذا عوضنا عن $\lambda\to n$ في المعادلة (8.13) فإننا نحصل على

$$E_n=-\frac{\mu c^2}{2}\frac{(Z\alpha)^2}{n^2} \qquad (8.34)$$

وهذه هي الصيغة قريبة جدا من تلك التي حصلنا عليها من خلال نموذج بور للذرة. لكن هنالك ما يزال بعض الإختلاف الجوهري بين الحالتين. والإختلاف يكمن في ظهور تأثير الزخم الزاوي الكلي وظهوره كلاعب مهم في حساب طاقة المستويات فضلا عن أن الحالة الممثلة للإلكترون قد تجسدت الآن بدالة موجة أكثر تعقيدا حيث لم تعد الصورة البدائية للمدارات الكوكبية في الذرة نافذة المفعول بل يبدو أمامنا الآن نموذج بور أشبه بنموذج لعبة Toy Model. فالآن لدينا دالة الموجة ذات الطبيعة الاحتمالية هي التي تحدد

مستويات الطاقة والجزء القطري من الدالة $R_{nl}(r)$ يحدد موضع الإلكترون قطريا على حين أن دوال التوافقيات الكروية $Y_{lm}(\theta,\phi)$ هي التي تحدد المواقع الزاوية للإلكترون. وكما نرى فإن للعدد الكمي الزاوي l دوراً في تعريف مستويات الطاقة. لقد كان نيلز بور محظوظاً حقا إذ توافقت نتيجته مع النتائج التجريبية على نحو جعل نموذجه مقبولاً تماما في الأوساط العلمية.

الطيف الذري

من خلال العلاقة (8.34) نجد أن الطول الموجي المنبعث عند انتقال إلكترون من مستوى m إلى آخر n فإن الطول الموجي للإلكترون المنبعث يحسب من العلاقة

$$\frac{1}{\lambda} = R_{\mu}\left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_f^2}\right) \tag{8.34a}$$

حيث أن $R_{\mu} = \dfrac{\mu e^4}{8\varepsilon_0{}^2 h^3 c}$ هو ثابت ريدبرج المعدل بحساب الكتلة المنقوصة للإلكترون وهذا يعتمد على كتلة النواة حيث تحتسب الكتلة المنقوصة بموجب المعادلة (8.11).

مثال: دعنا نجد أهمية الصيغة (8.34a) لمستويات طاقة بعض الذرات شبيهة الهيدروجين ونقارن الأطوال الموجية. دعنا نقارن بين الأطوال الموجية الحاصلة عن إنتقال الإلكترون من عبر المستويين الطاقة $n=3 \rightarrow n=2$ وهو خط H_{α} في ذرة الهيدروجين وذرة الهليوم.

التوالد الطيفي Spectral Degeneracy

إن حساب الطاقة يعتمد على العدد الكمي الرئيسي n كما هو واضح من المعادلة (8.26) وهذا العدد الكمي يتألف من عددين العدد الكمي القطري n_r والعدد الكمي المداري l. ولما كانت قيمة l تبدأ من الصفر فإن قيمة العدد الكمي الرئيسي يمكن أن تتألف من عدة أعداد مجموعها يؤلف العدد الصحيح المطلوب. مثلا: لو كانت $n=1$ فإن هذا يعني أن $n_r=0,\ l=1$ أو $n_r=1,\ l=0$ يعني أننا هنا أمام حالتين كلاهما يعطينا $n=2$

وبالتالي فلكليهما نفس الطاقة. لكنهما يمثلان فلكين مختلفين للإلكترون في كل منهما قيمة مختلفة للزخم الزاوي للإلكترون.

تسمى هذه الحالات التي يكون لها نفس المقدار من الطاقة الحالات المتوالدة Degenerate States وتسمى المدارات Orbits التي لها أفلاك Orbitals متعددة بالمدارات المتوالدة.

ولكن ما سبب التوالد هنا؟ إنه الزخم الزاوي المداري هذا الذي يسبب إضافة كمية للجهد الكهربائي بين الإلكترون والنواة. ولكي نتمكن من تثمين هذا الكلام ننظر في حالة الجهد الكهربائي المحوَّر التالي وما يتمخض عنه. لنفرض أن لدينا الجهد التالي

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{g^2}{r^2} \tag{8.35}$$

هذه الصيغة فيها حد مضاف على جهد كولوم التقليدي إذ أن فيها حد إضافي يتناسب عكسيا مع r^2. ولو عوضنا هذا الجهد في الجزء القطري من معادلة شرودنجر (8.10) لوجدنا أن المعادلة يمكن أن تحتفظ بصيغتها نفسها مع استبدال

$$\frac{l(l+1)}{r^2} \to \frac{l^*(l^*+1)}{r^2}$$

حيث أن

$$l^*(l^*+1) = l(l+1) + g^2 \tag{8.36}$$

ولو فتحنا الأقواس وأكملنا المربع في (8.28) لوجدنا أن هذا يعني أن

$$l^* = -1/2 + \sqrt{(l+1/2)^2 + g^2} \tag{8.37}$$

وبالتعويض في قيمة n عن هذا فإن صيغة الطاقة تكون

$$E_n = -\frac{\mu c^2}{2}\frac{(Z\alpha)^2}{\left[n_r + 1/2 + \sqrt{(l+1/2)^2 + g^2}\right]^2} \tag{8.38}$$

ونلاحظ أن التوالد الذي عرفناه في قيمة الطاقة يختفي حيث أن قيم l وn_r الداخلة في حساب الطاقة لن تعطي نفس الرقم، ففي كل مرة يكون لدينا قيمة مختلفة للطاقة.

دوال الموجة لأشباه الهيدروجين

إن الجزء القطري من دالة الموجة هو في (8.10) ويمكن وصفه بدلالة متعدد حدود لاجوري المرافق Associated Laguerre Polynmial

$$H(\rho) = L_{n-l-1}^{2l+1} \tag{8.39}$$

وعادة ما يتم تنظيم هذه الدوال في جداول وهنا نعطي عددا منها.

$$\begin{aligned}
R_{10}(r) &= 2\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} e^{-Zr/a_0} \\
R_{20}(r) &= 2\left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{3/2}\left(1-\frac{Zr}{2a_0}\right)e^{-Zr/2a_0} \\
R_{21}(r) &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{3/2}\frac{Zr}{a_0}e^{-Zr/2a_0} \\
R_{30}(r) &= 2\left(\frac{Z}{3a_0}\right)^{3/2}\left(1-\frac{2Zr}{3a_0}+\frac{2(r)^2}{27a_0^2}\right)e^{-Zr/3a_0}
\end{aligned} \tag{8.40}$$

حساب الإحتماليات

إن كثافة الإحتمالية المكانية لأي قيمة من n و l تكون

$$\rho(r) = r^2\left[R_{nl}\right]^2 \tag{8.41}$$

ولما كانت

$$R_{n,n-1}(r) \sim r^{n-1}e^{-Zr/a_0 n} \tag{8.42}$$

ولذا فإن كثافة الإحتمالية تتخذ قيمتها العظمى عندما يكون

$$\frac{d\rho(r)}{dr} = \left(2nr^{2n-1} - \frac{2Z}{a_0 n}r^{2n}\right)e^{-2Z/a_0 n} = 0 \tag{8.43}$$

أي عندما يكون

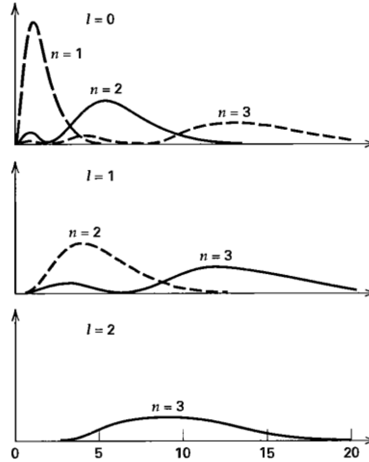
$$r_n = \frac{a_0 n^2}{Z} \tag{8.44}$$

وهذه هي مرة أخرى صيغة بور لحساب أنصاف أقطار المدارات. بمعنى أن المدارات هي المواقع التي تكون فيها كثافة الإحتمالية أعلى ما يمكن. إلا أن هذا لا يمنع من أن يزحف موقع الإلكترون قليلا أو كثيراً عن موقع القيمة العظمى للإحتمالية. وهنا نرى فرقاً آخر بين ذرة شرودنجر وذرة بور.

إن بالإمكان حساب القيمة المتوقعة لأية كمية طالما أننا أصبحنا نملك صيغة دوال الموجة. وهكذا يمكن أن نحسب

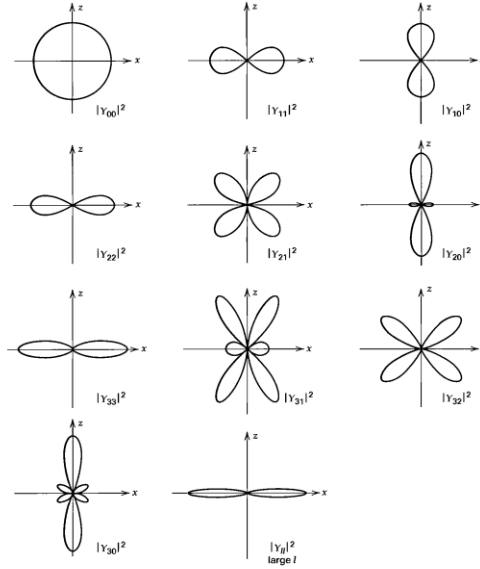
$$
\begin{aligned}
&< r >= \frac{a_0}{2Z}\left[3n - l(l+1)\right] \\
&< r^2 >= \frac{a_0^2 n^2}{2Z^2}\left[5n^2 + 1 - 3l(l+1)\right] \\
&< \frac{1}{r} >= \frac{Z}{a_0 n^2} \\
&< \frac{1}{r^2} >= \frac{Z^2}{a_0^2 n^3 (l+1/2)}
\end{aligned}
\qquad (8.45)
$$

وفيما يلي رسم لكثافة الإحتمالية لبعض الحالات



الشكل (8–2) كثافة الإحتماليات في ذرة الهيدروجين

كما يمكننا رسم بعض الأوربيتالات في بعدين.



الشكل (3-8) الأوربتالات الذرية

مثال

إلكترون في الحالة الدنيا للتريتيوم الذي تتألف نواته من نيوترونين وبروتون واحد حصل تفاعل نووي تغيرت بموجبه نواة التريتيوم إلى نواة He^3 الذي تحتوي نواته على بروتونين ونيوترون واحد. إحسب إحتمالية أن يبقى الإلكترون في الحالة الدنيا لذرة He^3 .

الحل: أولا إن دالة الموجة للإلكترون في الحالة الدنيا لذرة التريتيوم (Z=1) هي

$$|\psi_{100}>^H = \frac{2}{\sqrt{4\pi}}\left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2} e^{-r/a_0}$$

ومن أجل حساب الإحتمالية المطلوبة فإننا يجب أن نسقط هذه الدالة على دالة الهليوم He^3 (Z=2) ذات الإلكترون الواحد في الحالة الدنيا وهذه هي

$$|\psi_{100}>^{He^{3+}}=\frac{2}{\sqrt{4\pi}}\left(\frac{2}{a_0}\right)^{3/2}e^{-2r/a_0}$$

وهذا يعني أن

$$a_{100}=\int\frac{2}{\sqrt{4\pi}}\left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2}e^{-r/a_0}.\frac{2}{\sqrt{4\pi}}\left(\frac{2}{a_0}\right)^{3/2}e^{-2r/a_0}r^2drd\Omega$$
$$=\frac{8\sqrt{2}}{a_0^{\ 3/2}}\int_0^\infty r^2e^{-3r/a_0}dr=\frac{8\sqrt{2}}{a_0^{\ 3/2}}\left(\frac{a_0}{3}\right)^3 2!=\frac{16\sqrt{2}}{27}$$

ثم نربع النتيجة فهي الإحتمالية المطلوبة، أي أن

$$P=|a_{100}|^2=\frac{512}{729}\cong 70\%$$

ذرة الهيدروجين الحقيقية

في المعالجة السابقة عاملنا سرعة الإلكترون على أنها كلاسيكية أقل كثيرا من سرعة الضوء اللك لم ندخل في حساباتنا التأثيرات النسبوية. كذلك فإننا لم ندخل برم الإلكترون كعامل يساهم في تحديد الهاملتوني للذرة بالتالي فإن المعالجة الأشمل لذرة الهيدروجين وشبيهاتها ينبغي أن تأخذ بعين الإعتبار هذه المساهمات التي ستؤثر في النتائج الدقيقة للحسابات، لكن هذا ليس من مسائل هذا الكتاب.

أسئلة مفاهيمية حول الفصل الثامن

1. ما الفرق بين القيم المخصوصة للطاقة في حل معادلة شرودنجر وفي نموذج بور؟
2. ما دور الزخم الزاوي في تحديد قيم الطاقة؟

3. ما الفرق بين المدارات الإلكترونية المحددة بموجب نموذج بور للذرة وما تقدمه حلول معادلة شرودنجر؟

4. ماذا تتوقع أن يحصل لطيف ذرة الهيدروجين لو أضفنا البرم إلى الهاملتوني؟

5. كيف تتوقع أن يكون شكل دالة الموجة العام فيما لو أدخلنا البرم إلى النظام؟

6. كيف تتأثر إحتمالية إيجاد الإلكترون في موقع معين عند التأثير على الذرة بمجال خارجي؟

7. لماذا يحصل التوالد لطاقة الجسيم في صندوق صلد الجدران ثلاثي الأبعاد.

8. لماذا يحصل التوالد في مستويات الطاقة لذرة الهيدروجين؟

مسائل الفصل الثامن

س1) قارن بين الطول الموجي المنبعث عند حصول الإنتقال 2P ⟵ 1S في (أ) ذرة الهيدروجين (ب) الديوتيريوم (ج) البوزيترونيوم.

س2) إلكترون مستقر في الحالة الدنيا لذرة التريتيوم (نواته تتألف من بوتون واحد ونيوترونين). هذه الذرة تتحول فجأة الى نظير الهليوم He^3. ما هي إحتمالية أن يبقى الإلكترون في الحالة الدنيا لذرة He^3.

س3) إحسب قيمة r التي عندها تكون الإحتمالية أعظم ما يمكن للحالات التالية:

$$(i)\, n-1,\ l=0,\ m=0, \quad (ii)\, n=2,\ l=1,\ m=0 \quad (iii)\, l=n-1,\ m=0$$

ثم قارن النتائج مع نموذج بور.

س4) إلكترون في المجال الكهربائي لبروتون يوصف بدالة الموجة التالية

$$|\psi>= N\left[4\,|\psi_{100}>+3\,|\psi_{211}>-|\psi_{210}>+\sqrt{10}\,|\psi_{21-1}>\right]$$

إحسب: (أ) ثابت التقويم N.

القيمة المتوقعة للطاقة.

القيمة المتوقعة لمربع الزخم الزاوي

القيمة المتوقعة للمركبة z للزخم الزاوي

س5) إلكترون في الحالة

$$|\psi>=\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^{3/2}e^{-\alpha^2r^2l2}$$

أكتب صيغة رياضية تعبر عن إحتمالية إيجاد هذا الإلكترون في الحالة الدنيا لذرة الهيدروجين.

س6) ناقش مسألة المتذبذب التوافقي في ثلاثة أبعاد وتلمس الحلول الممكنة.

تعريف بالمصطحات الواردة في الكتاب

موجة دي بروي de Broghlie Wave

وهي موجة إفتراضية تعبّر عن وجود الجسيم بصيغة رياضية كرزمة موجية Wavepacket مؤلفة من تراكب أمواج كثيرة أو موجة مستوية بسيطة. وتسمى أمواج دي بروي أمواجا مادية لتمييزها عن الأمواج الكهرمغناطيسية والأمواج الميكانيكية. كما تسمى أمواج الإحتمالية Probability Waves لكون سوياتها تعبر عن إحتماليات النظام.

النظام System

أي جسيم أو مجموعة جسيمات (أو كينونات) لها وصف فيزيائي وتعبير رياضي قابل للتداول.

مبدأ التراكب Superposition Principle

يفترض ميكانيك الكموم أن حالة أي نظام تتألف من مجموعة من حالات متراكبة على بعضها البعض الآخر. وفي تصور الميكانيك الموجي لشرودنجر فإن هذه الحالات هي أمواج مستوية تتراكب على بعضها البعض الآخر لتؤلف رزمة موجية Wavepacket. ومبدأ التراكب فرضية أساسية في ميكانيك الكموم.

رزمة الأمواج Wavepacket

هي مجموعة الأمواج المتراكبة لتأليف حالة النظام سواء كان جسيما واحدا أو مجموعة جسيمات.

موجة الزمرة Group Wave

الموجة الكلية التي تؤلف غلاف أمواج الطور المتراكبة على بعضها.

دالة الموجة Wave Function

مصطلح وضع في إطار التصوير الموجي للجسيمات يقصد به تعبير رياضي يصف حالة النظام ويحتوي على كافة خصائصه. نتعامل بهذا المصطلح في صياغات شرودنجر لميكانيك الكموم.

الحالة State

تعبير عن وضع النظام الفيزيائي ويمكن أن تكون الحالة نقية pure أو تكون مختلطة mixed فإن كانت نقية فهي بسيطة وتمثل بموجة مستوية مثلاً أما إذا كانت مختلطة فإنها تكون متراكبة من أحوال متباينة في الطور.

متجه الحالة State Vector

مصطلح وضع في إطار التصوير المصفوفي المتجهي للنظم الفيزيائية يقصد به تعبير رياضي يصف حالة النظام ويحتوي على كافة خصائصه. نتعامل بهذا المصطلح في صياغات هايزنبرغ لميكانيك الكموم.

النشر Expansion

كتابة متجه في الفضاء بدلالة مساقطه على أسس الفضاء أي بدلالة مركباته. وعند كتابة متجه الحالة بدلالة أسس فضاء هلبرت فإن عملية النشر هذه هي تحليل الحالة إلى مكوناتها الأسسية.

المضروب القياسي Scalar Product

هو مسقط المتجه على آخر.

التعامد Orthogonality

عندما يكون مسقط حالة على أخرى صفرا فإن الحالتين متعامدتين. وكذلك الأمر مع المتجهات.

الإحتمالية Probability

نسبة يراد بها وصف حالة للنظام مقرونا بأحواله الممكنة الأخرى كلها فلا معنى للإحتمالية دون تعدد الأحوال.

كثافة الإحتمالية Probability Density

توزع الإحتمالية على خط أو سطح أو في حجم. وفي الذرات هي مؤشر لإحتمالية إيجاد الإلكترونات في المواقع.

معادلة الإستمرارية Continuity Equation

معادلة عامة في الفيزياء تعبّر عن حفظ الكثافة والتيار في صورتها العامة. وهي تعبير عام عن حفظ الطاقة والزخم.

إجراء Operator

تعبير رياضي يمثل تحويلاً transformation للحالة بطريقة ما كالإنتقال المكاني (ممثلا بإجراء الزخم الخطي) أو الإنتقال الزماني (ممثلاً بإجراء الطاقة الكلية المسمى الهاملتوني) أو التدوير (ممثلاً بإجراء الزخم الزاوي) وقد سميناه إجراء لأنه يجري على الحالة فيحولها إلى أخرى. يؤلف الإجراء بالصيغة المصفوفية مصفوفة مربعة قيمها المخصوصة هي القيم المخصوصة لذلك الإجراء.

الدوال الإجرائية Operator Functions

دوال جبرية مؤلفة من إجراءات بدل المتغيرات.

الإجراءات المتبادلة Commuting Operators

وهي التي لا تختلف نتائج عملها عند تبديلها في التعاقب على بعضها فإن كان $AB = BA$ قيل أنهما إجرائين متبادلين. ولهذه الإجراءات مضامين وخصائص أهمها أن لها متجهات مخصوصة متزامنة ولا يؤثر قياس الملحوظ المقابل لأحدها على قياس الملحوظ المقابل للآخر.

الإجراءات اللامتبادلة Non-Commuting Operators

وهي التي تختلف نتائج عملها عند تبديلها في التعاقب على بعضها فإن كان $AB \neq BA$ قيل أنهما إجرائين لامتبادلين. ولهذه الإجراءات مضامين وخصائص أهمها أن ليس لها متجهات مخصوصة متزامنة ويؤثر قياس الملحوظ المقابل لأحدها على قياس الملحوظ المقابل للآخر.

الإجراءات الهرمايتية Hermitian Operators

هي الإجراءات التي تكون قيمها المخصوصة حقيقية وتمثل الملحوظات المقابلة لها كميات فيزيائية قابلة للقياس. وفي الصيغة المصفوفية يكون ترانسبوز المصفوفة بقرينها المعقد مساويا لها أي $A^{\dagger} = A$.

إجراءالتخليق Creation Operator

هو إجراء يعمل على تخليق حالة من حالات الطاقة أي يرفع مستوى الطاقة إلى قيمة المستوى التالي الأعلى عندما يعمل على متجه الحالة.

إجراء الإفناء Annihilation Operator

هو إجراء يعمل على إفناء حالة من حالات الطاقة أي يخفض مستوى الطاقة إلى قيمة المستوي التالي الأدنى عندما يعمل على متجه الحالة وبالأخص في مسألة المتذبذب التوافقي البسيط.

إجراءات الرفع Raising Operator

وهي إجراءات تعمل على رفع قيمة الزخم الزاوي إلى المستوى التالي الأعلى عندما تعمل على متجه الحالة للنظام.

إجراءات الخفض Lowering Operator

وهي إجراءات تعمل على خفض قيمة الزخم الزاوي إلى المستوى التالي الأدنى عندما تعمل على متجه الحالة للنظام.

حالة مخصوصة Eigenstate (أو دالة مخصوصة Eigen Function)

حين يعمل إجراء على حالة فينتج عنه الحالة نفسها مضروبة بعدد فقط فإننا نقول أن تلك الحالة مخصوصة لذلك الإجراء المعين فهي متعلقة به، مخصوصة له.

متجه الحالة State Vector (متجه مخصوص)

حين نتكلم بمفردات وإصطلاحات فضاء هلبرت نعبّر عن حالة النظام بمتجه في ذلك الفضاء ونسميه متجه الحالة وهو نفسه حالة النظام في إطار تصور هيزنبرغ وهو دالة الموجة في تصور شرودنجر، لا فرق بل هي إصطلاحات وتسميات. فإن كان متجه الحالة مخصوصا بإجراء معين سمي متجه مخصوص.

الحالات المقيدة Bound States

حالات النظام التي يكون فيها مقيداً داخل حدود معينة مفروضة عليه بموجب شروط فيزيائية.

الحالات (الدوال أو المتجهات) المخصوصة المتزامنة Simultaneous Eigenstates

هي الحالات التي تكون مخصوصة بأكثر من إجراء في آن واحد. والشرط أن تكون الإجراءات تبادلية مع بعضها فإن لم تكن لم يكن من حالات مخصوصة متزامنة.

سوية المتجه Norm of a Vector

القيمة المطلقة للمتجه وهو كمية عددية موجبة.

الملحوظ Observable

ويقصد به الكمية الفيزيائية المقابلة لإجراء معين فإن ميكانيك الكموم لا يرى الكميات الفيزيائية إلا إجراءات أو هي نتاج إجراءات وهي ما يلاحظ بالفعل في الواقع ويتم قياسه في المختبر. وجميع الملحوظات كميات حقيقية قابلة للقياس. فإن لم تكن فهي ليست بملحوظات. مثال ذلك زخم الجسم وطاقته. ونظرا لأن الملحوظات مقلبة دوماً لإجراءات فقد حصل خلط غير مقصود بينها في كثير من الكتب.

القيمة المخصوصة Eigenvalue

يسمى العدد النتاتج من تشغيل الإجراء على حالته المخصوصة قيمة مخصوصة فإن كان العدد حقيقيا كان الإجراء العامل مقابلا لملحوظ فيزيائي مثل إجراء الزخم الخطي وإجراء الطاقة الكلية (الهاملتوني).

القيمة المتوقعة Expectation Value

للنظام الكمومي أحوال مختلفة وهو لا يستقر على واحد منها ويسمى معدل أقيام الحالات المختلفة لأي ملحوظ من الملحوظات الخاصة بالنظام القيمة المتوقعة لذلك الملحوظ وهي قيمة نظرية نستخرجها بالحساب ولا يشترط الحصول عليها بنفسها في بالقياس.

إجراء الإسقاط Projection Operator

إجراء يقصد به إسقاط الحالة على وضعها عند قيمتها لحظة القياس.

الهاملتوني Hamiltonian

وهو تعبير عن الطاقة الكلية للنظام ويتخذ الصيغة الجبرية لمتغيرات في الميكانيك الكلاسيكي بكونه مجموع الطاقة الحركية والكامنة في النظام. أما في ميكانيك الكم فيتخذ الهاملتوني الصيغة الإجرائية ويعبر عنه بتعابير رياضية صرف.

اللاغرانجي Lagrangian

فضل الطاقة الحركية على الطاقة الكامنة في الميكانيك الكلاسيكي. وفي ميكانيك الكموم هو صيغة إجرائية تعبر عن حالة مختزلة لمعادلة الحركة.

التوالد Degeneracy

نشوء حالات مكررة للنظام لها القيم المخصوصة نفسها. ويحصل التوالد في الطاقة وفي الزخم الزاوي. فحالات الطاقة المتوالدة تمتلك الطاقة نفسها وحالات الزخم الزاوي المتوالدة لها الزخم الزاوي الكلي نفسه. ويتم فرز الحالات المتوالدة للطاقة والزخم الزاوي عملياً باستخدام مجال مغناطيسي خارجي في مايعرف بظاهرة زيمان.

البرم Spin

صفة ذاتية للجسيمات الأولية وللنظم تختص فيها حالة النظام بخصائص معينة تحت تأثير إجراء التدوير. ويقاس البرم بوحدات ثابت بلانك.

فضاء الإحداثيات Coordinate Space

هو فضاء ثلاثي الأبعاد محاوره هي الأبعاد المكانية المتعامدة على بعضها وتوصف فيه حالات النظام.

فضاء الزخم Momentum Space

هو فضاء ثلاثي الأبعاد محاوره هي مركبات الزخم الخطي المتعامدة على بعضها وتوصف فيه حالات النظام.

فضاء هلبرت Hilbert Space

فضاء خطي لانهائي الأبعاد (بصورة عامة) أسسه متجهات هي عبارة عن دوال معقدة للزمان والمكان متعامدة على بعضها توصف فيه الحالات الكمومية.

التقويم Normalization

عملية تقييس الدالة (صيغة حالة النظام) حتى تكون الإحتمالية الكلية لها 100%.

الطور Phase

في أبسط حالاته هو طور الموجة ويمكن أن يمثل إتجاه الحالة في فضاء الإحداثيات.

الطاقة الصفرية Zero-Point Energy

طاقة النظام في حدها الأدنى. نحصل على الطاقة الصفرية في حالتي الجسيم المقيد في صندوق ذي جدران صلبة وفي حالة المتذبذب التوافقي.

الشروط الحدودية Boundary Conditions

شروط فيزيائية وعلاقات تتم صياغتها بصيغ رياضية تعبر عن حدود النظام وفقا لمحدود متغيراته.

التحويلات الوحدوية Unitary Transformations

تحويلات يراد منها تغيير أسس الفضاء الذي يوصف فيه النظام بما يحفظ إحتماليات حالاته الممكنة.

التحويلات المعيارية Gauge Transformation

تحويلات تقيسية يراد منها إبدال مقياس الكمون أو الطور للنظام بآخر. وتكون بعض النظم لا تغيرية تحت هذه التحويلات بينما تتغير نظم أخرى تحت مثل هذه التحويلات.

مصفوفات باولي Pauli Matrices

ثلاثة مصفوفات مربعة تعبر عن المركبات الثلاثة لإجراءات برم الإلكترون وتمثل إجراءات تدوير محورية.

مبدأ الاستثناء لباولي Pauli Exclusion Principle

مبدا يقول بعدم امكان إجتماع جسيمين لهما برم نصف في حالة كمومية واحدة. وسببه التناظمر المضاد لهذه الحالات.

شرط الإكتمال Completeness Condition

ويقصد به أن أسس الفضاء الخطي تؤلف مجموعة كامة من متجهات وحدة مقومة ومتعامدة على بعضها. وفي صورة أخرى ينعكس هذا الشرط بقولنا أن مجموع إحتماليات الحالات المختلفة للنظام يساوي واحد صحيح.

الحالة الأرضية (الدنيا) Ground State

وهي حالة أدنى طاقة يمكن أن يمتلكها النظام

الحالات المثارة Excited States

وهي الحالات التي يكون فيها النظام في طاقة أعلى من طاقة الحالة الأرضية.

التحيّز (التموضع) Localization

تعيين فترة مكانية محددة لموقع النظام ويتم عبر تصوير النظام موجيا بتراكب أمواج كثيرة تمثل كل منها حالة من حالات النظام الفيزيائي. ويتواجد النظام في هذه الأحوال باحتماليات مختلفة يمكن حسابها.

الجهد (الكمون) Potential

طاقة تعبر عن قوة كامنة في النظام أو مفروضة عليه.

التنفيق الكمومي Quantum Tunneling

هروب الجسيمات عبر كمون أكبر من طاقتها الحركية.

التعلق الكمومي Quantum Entanglement

ترابط نظام مع آخر بعلاقة لا سببية تجعله ملتزما إياه في تغير أحواله ومستجيبا للتلك التغيرات في الحال.

تقطير المصفوفات Matrix Diagonalization

ويقصد به تحويل المصفوفات المربعة إلى قطرية تصطف عناصرها على قطر المصفوفة فيما تكون العناصر الأخرى كلها صفراً. ويستفاد من العملية في تحصيل القيم المخصوصة للمصفوفة، إذ تكون العناصر القطرية هي قيمها المخصوصة. فضلا عن سهولة التعامل مع المصفوفة القطرية في عمليات الجمع والضب واستخراج المعكوس.

ثوابت فيزيائية

شحنة الإلكترون	1.6021×10^{-19} C
الأكترون فولت	1.6021×10^{-19} J
كتلة الإلكترون	9.1093×10^{-31} kg
	0.511 MeV/c^2
كتلة البروتون	1.6726×10^{-27} kg=938.2723 MeV/c^2
كتلة النيوترون	1.6749×10^{-27} kg=939.5656 MeV/c^2
ثابت بولتزمان	1.3806×10^{-23} J/K
ثابت بلانك	1.0545×10^{-34} J.s
	6.5821×10^{-27} MeV.s
ثابت التركيب الدقيق	1/137
نصف قطر بور	0.5291×10^{-10} m
ثابت ريدبرج	1.096×10^{7} m^{-1}
وحدة الكتلة الذرية	1.6605×10^{-27} kg
مغنطون بور	0.5788×10^{-10} MeV/T
ثابت الجاذبية الكوني	6.6725×10^{-11} $m^2/kg.s^2$
سرعة الضوء	2.9987×10^{8} m/s

المراجع

S. Gasiorowicz, Quantum Physics, 3rd Edition, John Wiley & Sons, Inc. 2003.

D. Griffiths, Introduction to Quantum Mechanics, Printice Hall Inc. 1995.

N. Zettili, Quantum Mechanics and Applications, 2nd Edition, John Wiley & Sons, Inc. 2009.

G. L. Squaires, Problems in Quantum Mechanics, Cambridge University Press, 1995.

P.M.A. Dirac, Principles of Quantum Mechanics, Cambridge University Press 1959.

عنوان المؤلف

البريد الإلكتروني: basel_tai@yahoo.com

قناة اليوتيوب للمؤلف

https://www.youtube.com/user/Baseltai?ob=0&feature=results_main